Functorial Property

정리 1 *$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induces a homomorphism*
$f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ given by $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.

증명 먼저 $f_\sharp([\alpha])$가 잘 정의되는지 살펴보자. 즉 $\alpha \sim \alpha'$에 대해 $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$임을 보이자. α 와 α' 사이의 homotopy를 F라 하면,

$(f \circ F)$(t,0) = f(F(t,0)) = f($\alpha(t)$) = $(f \circ \alpha)(t)$
$(f \circ F)$(t,1) = f(F(t,1)) = f($\alpha'(t)$) = $(f \circ \alpha')(t)$
$(f \circ F)$(0,s) = f(F(0,s)) = f(x_0) = y_0 $\quad \forall s \in I$

이므로 $f \circ F$는 $f \circ \alpha$와 $f \circ \alpha'$ 사이에 homotopy를 준다.
다음으로 $f_\sharp$이 homomorphism임을 보이자.
$f_\sharp([\alpha][\beta]) = f_\sharp([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)]$이고,

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

이므로 $f \circ (\alpha * \beta)$는 정확히 $(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$가 된다. 따라서,
$f_\sharp([\alpha][\beta]) = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_\sharp([\alpha])f_\sharp([\beta])$. □

정리 2 *(Functorial Property)*
1) $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$
$\Rightarrow (g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$.
2) $id_\sharp = id$.

증명
$(g \circ f)_\sharp[\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_\sharp[f \circ \alpha] = g_\sharp(f_\sharp[\alpha]) = (g_\sharp \circ f_\sharp)[\alpha]$.
$id_\sharp[\alpha] = [id \circ \alpha] = [\alpha]$. □

따라서 π_1은 Category of topological space with base point에서 Category of group으로 가는 Functor이다.

Applications
1. If f has an inverse f^{-1} then $(f^{-1})_\sharp = (f_\sharp)^{-1}$ by functorial property.
$\because f_\sharp \circ (f^{-1})_\sharp = (f \circ f^{-1})_\sharp = id_\sharp = id$.

따름정리 3 *$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ is a homeomorphism.*
$\Rightarrow f_\sharp : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$ is an isomorphism.

나중에 엄밀한 증명을 하겠지만, 예를 들어 $\mathbb{R}^2$와 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$의 fundamental group은 각각 0과 $\mathbb{Z}$이므로 이 두 공간은 homeomorphic하지 않다.

2. Brouwer Fixed Point Theorem

정리 4 *Let $f : D^2 \to D^2$ be a map. Then f has a fixed point, i.e., $\exists x \in D^2$ such that f(x)=x.*

증명 f가 fixed point를 갖지 않는다고 가정하자.
$g(x)$를 $f(x)$에서 출발하여 x를 지나는 반직선과 ∂D^2의 교점으로 정의하면, 함수 $g : D^2 \to \partial D^2$가 정의된다. 즉,

$$g(x) = f(x) + t(x - f(x)) \quad \textit{where } t > 0 \textit{ and } \|f(x) + t(x - f(x))\| = 1.$$

이때, g는 연속이고, $\partial D^2 = S^1$에서 $g(x) = x$이므로, 다음 diagram이 commute한다.

$$\begin{tikzcd}
D^2 \arrow[rr, "g"] & & \partial D^2 \\
& \partial D^2 \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

이에 대응하는 fundamental group들을 생각해 보면,

$$\begin{tikzcd}
0 = \pi_1(D^2, 1) \arrow[rr, "g_\sharp"] & & \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} \\
& \pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z} \arrow[ul, "i_\sharp"] \arrow[ur, "id_\sharp"'] &
\end{tikzcd}$$

이 되고, $0 = g_\sharp \circ i_\sharp = (g \circ i)_\sharp = id_\sharp = id : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 이므로 이는 모순이다. $\square$