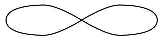
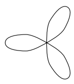
III.3 Applications

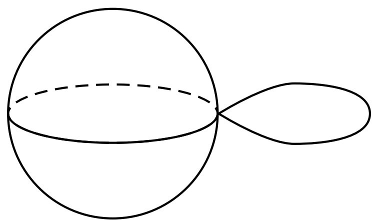
1. $X =$  $\Rightarrow \quad \pi_1(X) = \mathbb{Z} \underset{\{e\}}{*} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$

(Free group with 2 generators)

각 circle을 포함하는 open set을 U, V라고 하면 (즉, $U =$,$V =$), $\pi_1(U) = \pi_1(V) = \mathbb{Z}$이고 $\pi_1(U \bigcap V) = \{e\}$이므로 amalgamated product를 생각하면 $\pi_1(X) = F_2$임을 알 수 있다.

같은 방법으로 $\pi_1($  $) = F_3$(Free group with 3 generators)이다.

2.



S^2를 포함하는 open set과 circle을 포함하는 open set을 생각하면, $\pi_1(S^2) = 1$, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$이고 교집합의 fundamental group은 trivial group이므로, 그림과 같은 surface의 fundamental group은

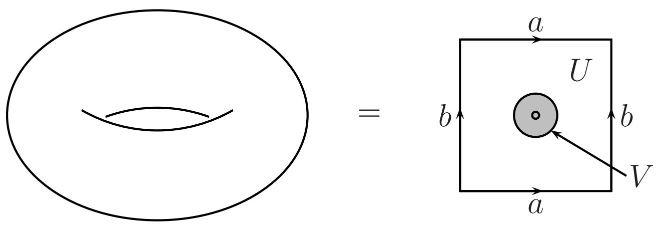
$$1 * \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

이다.

3. $X = M^2$, closed surface.

(1) orientable case

먼저 Torus의 경우를 생각하면, 앞절에서 살펴본 바와 같이 Fundamental group이 $\mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$이다. 이를 Van-Kampen Theorem을 이용하여 구해보자.

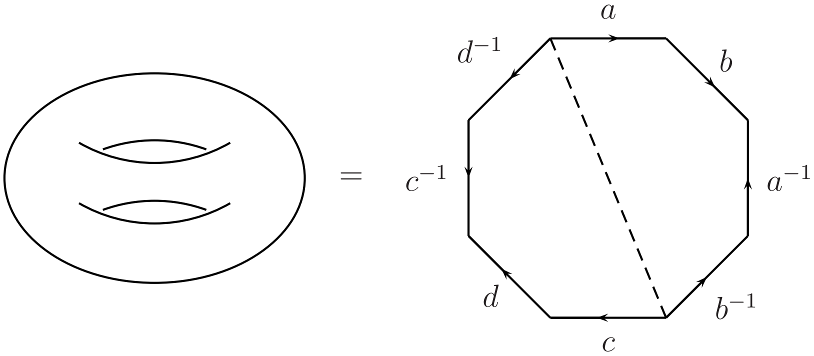


Torus는 사각형의 각 변을 서로 Identify해 준것과 같다. 오른쪽의 그림에서와 같이 Torus에서 한점 빼준 open set을 U, 그점을 포함하는 open neighborhood를 V라고 하면, $U \bigcap V$는 annulus와 같으므로 $\pi_1(U \bigcap V) = \mathbb{Z}$이고, V는 disk이므로 $\pi_1(V) = \{e\}$이다. 또한 숙제 1에서 $\pi_1(U) = \pi_1$(figure eight)임을 알아본 바 있으므로, (실제로 그림에서 figure eight $a \cup b$는 U의 strong deformation retract가 됨을 쉽게 알 수 있다.) $\pi_1(U) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$이다.

group presentation을 이용하여 amalgamated product를 구하기 위하여 각 group의 generator를 알아보면, $\pi_1(U)$의 generator는 위 그림에서 loop a, b의

equivalence class들이고, $\pi_1(U \bigcap V)$의 generator는 점주위를 한바퀴 도는 loop (c라고 하자)의 equivalence class이다. $\pi_1(V)$의 generator는 없으므로 Amalgamated product는 a, b로 generate되는 free group에 relation만 주면 되는데, loop c는 U의 loop로 보면 $aba^{-1}b^{-1}$이고 V의 loop로 보면 constant loop이므로 relation은 $aba^{-1}b^{-1} = 1$임을 알 수 있다.
따라서, $\pi_1(Torus) =< a, b \mid aba^{-1}b^{-1} >= \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$이다.

마찬가지로 genus가 2인 surface에 대해서 생각해보면, genus가 2인 surface는 Torus를 2개 connected sum해준 것이므로 다음 그림과 같이 8각형을 이용하여 표현할 수 있다.



오른쪽 그림에서 점선을 따라 자르면 각각은 Torus에 disk를 떼어낸 것과 같음을 알 수 있다. (점선부분이 disk가 된다.) 따라서 위 그림은 2개의 Torus에서 disk를 떼어내고 disk끼리 붙인 것이므로(다시 말해 connected sum) genus가 2인 surface를 나타낸다.
Torus의 경우와 마찬가지로 생각해보면, 이 surface의 fundamental group은

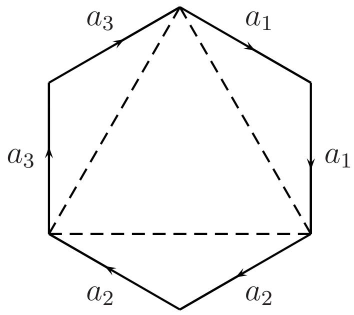
$$< a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} >$$

이다. 일반적으로 genus가 g인 surface는 $4g$각형으로 표현할 수 있다. 위와 같은 방법으로 U, V를 잡고 amalgamated product하면

$$\pi_1(\Sigma_g) =< a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] >$$

임을 알 수 있다. (여기서 $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$: commutator of a and b)

(2) Non-orientable case
Non-orientable surface M은 $M = N_k = \mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2\sharp\cdots\sharp\mathbb{R}P^2$로 나타낼 수 있다.
따라서, M은 다음 그림과 같이 다각형으로 표현할 수 있다.

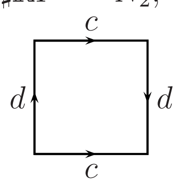


위 그림은 $M = N_3$의 경우인데 점선을 따라 자르면 가운데 삼각형은 S^2에서 disk를 3개 떼어낸 것과 같고 나머지 삼각형들은 $\mathbb{R}P^2$에서 disk를 떼어낸 것과 같다.(마찬가지로 점선부분이 disk가 된다.) 따라서 위 도형은 $\mathbb{R}P^2$ 3개를 connected sum한 것과 같다.
orientable case와 마찬가지로 open set U,V를 잡고 Fundamental group을 계산하면,

$$\pi_1(N_k) =< a_1, \cdots, a_k \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_k^2 >$$

임을 알 수 있다. 특히 $k = 1$이면 $\pi_1(\mathbb{R}P^2) =< a \mid a^2 >= \mathbb{Z}/2$이다.

숙제 10. K : Klein Bottle
Since $K = \mathbb{R}P^2\sharp\mathbb{R}P^2 = N_2$, We know $\pi_1(K) =< a, b \mid a^2b^2 >$.

But from $K =$ 

, we get $\pi_1(K) =< c, d \mid cdc^{-1}d >$.

(1) Compare two presentations.
(2) Find $\pi_1(T^2)$ in $\pi_1(K)$ as a subgroup of index 2.
(3) Can you show $\pi_1(K)$ is non-abelian?

4. $X = S^n$, $n \geq 2 \Longrightarrow \pi_1(S^n) = 0$
북반구를 포함하는 open ball을 U, 남반구를 포함하는 open ball을 V라 하면 U, V는 모두 disk이므로 $\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0$이다. 따라서 이들을 amalgamated product하면 $\pi_1(S^n) = 0$이다.(여기서 $n \geq 2$이어야 $U \bigcap V$가 path connected이다.)
또한 S^n은 $\mathbb{R}P^n$의 double covering space라는 사실로부터 $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2$임을 알 수 있다.

이를 이용하면 다음 정리를 얻는다.

정리 1 (Borsuk-Ulam)
(1) There is no anti-pode preserving map $f : S^n \to S^1$.
(2) Let $f : S^n \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \exists x \in S^n$ such that $f(x) = f(-x)$.

증명 (1) anti-pode preserving map f가 존재한다면 다음 diagram이 commute한다.

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^1 \\ q\downarrow & & \downarrow r \\ \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R}P^1 = S^1 \end{array}$$

이 때, q와 r은 quotient map이며 f가 anti-pode perserving이므로, $\bar{f}$가 잘 정의된다.
$\bar{f}_\sharp : \pi_1(\mathbb{R}P^n) \to \pi_1(\mathbb{R}P^1)$을 생각하면, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2$이고 $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$이므로 $\bar{f}_\sharp = 0$이다. 따라서, $\mathbb{R}P^n$의 loop의 $\bar{f}$-image는 $\mathbb{R}P^1$에서 constant loop와 homotopic한 loop가 되고 이 loop를 S^1으로 올리면 constant loop와 homotopic한 loop가 되어야 한다.
그런데, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2$이므로 $\mathbb{R}P^n$에는 constant loop와 homotopic하지 않은 loop가 존재하고, S^n에서 x_0와 $-x_0$를 연결하는 path를 project시킨 것이 이러한 성질을 가지고 있다. 이 path의 f-image는 anti-pode preserving이라는 가정에서 S^1의 loop가 되지 않으므로 diagram이 commute한다는 사실에 모순이다. 따라서 anti-pode preserving map f는 존재하지 않는다.

(2) 임의의 $x \in S^n$에 대하여 $f(x) \neq f(-x)$이라고 가정하자.
$g : S^n \to S^1$을 $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$로 정의하면 g는 anti-pode preserving map이 되므로 모순이다. $\square$

5. $\pi_1(M^n \sharp N^n) = \pi_1(M^n) * \pi_1(N^n)$ if $n \geq 3$.
$M \setminus B^n$을 살짝 포함하는 open set U, $N \setminus B^n$을 살짝 포함하는 open set V를 $\pi_1(U \bigcap V) = \pi_1(S^{n-1}) = 0$이 되도록 잡을 수 있으므로 자명하다.