IV.1 Descriptions of higher homotopy groups

Notation

$I^n = \underbrace{I \times \cdots \times I}_{n}$ = the unit n-cube

$=\{t = (t_1, \cdots t_n) \in \mathbb{R}^n | 0 \le t_i \le 1, i = 1, 2, \cdots, n\}$

∂I^n = boundary of $I^n = \{t = (t_1, \cdots t_n) \in \mathbb{R}^n | t_i = 0$ or 1 for some $i\}$

1st description

$F_n(X, x_0) := \{\alpha : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)\}$
$\alpha, \beta \in F^n$에 대하여, $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha \simeq \beta$ rel ∂I^n이라고 하면,

$$\boxed{\pi_n(X, x_0) := F_n(X, x_0)/\sim}$$

이 된다. 물론 $\pi_n(X, x_0)$ 의 원소는 $[\alpha]$(eqivalence class of α)이다.

먼저 $\pi_n(X, x_0)$에 group structure 를 주자.
$\alpha, \beta \in F_n(X, x_0)$ 에 대해서

$$\alpha * \beta(t_1, \cdots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & 0 \le t_1 \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \frac{1}{2} \le t_1 \le 1 \end{cases}$$

이라고 하고, $[\alpha][\beta] := [\alpha * \beta]$ 라고 정의하면, 이는 잘 정의된다.
즉, $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ 이면 $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$이다.(check).
그리고 π_1의 경우와 똑같은 이유로 (이때 $t_2, \cdots, t_n$ 은 상수로 취급)
$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$, $\alpha * x_0 \sim x_0 * \alpha$, $\bar{\alpha} * \alpha \sim \alpha * \bar{\alpha}$ 가 성립하므로
$\pi_n(X, x_0)$는 group이 된다.
(여기서 $\bar{\alpha}(t_1, \cdots, t_n) := \alpha(1 - t_1, t_2, \cdots, t_n)$)

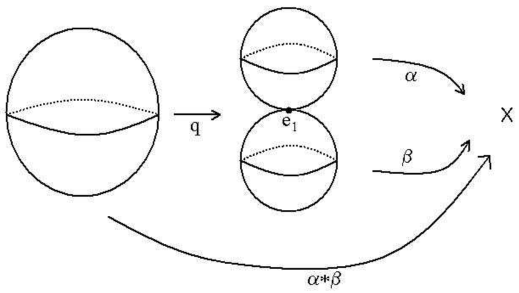
2nd description

Observe that $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, 1), (X, x_0)]$
$=$ the set of homotopy classes of maps $f : (S^1, 1) \to (X, x_0)$
Similarly,

$$\boxed{\pi_n(X, x_0) = [(S^n, e_1), (X, x_0)]}$$

이 때, $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$이다.

이 경우 $\alpha, \beta : (S^n, e_1) \to (X, x_0)$에 대해서 $\alpha * \beta$는 아래 그림과 같이 정의되는 $(S^n, e_1) \to (X, x_0)$의 map 과 대응된다.



3rd description

Use loop space $\Omega(X, x_0)$ and view $\pi_2(X, x_0)$ as $\pi_1(\Omega(X, x_0), x_0)$.
이 경우 $\pi_1(\Omega(X, x_0), x_0)$를 정의하기 위해서 function space $\Omega(X, x_0)$에 topology가 필요하다.

Topology on a function space

The most commonly used and useful topology for a function space is the **compact-open topology**.

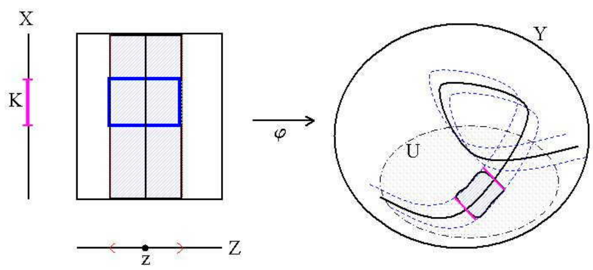
먼저 $Y^X := \{f | f : X \to Y, \text{ a continuous function}\}$라고 하자. 그리고 주어진 $K^{compact} \subset X$ 와 $U^{open} \subset Y$에 대해서 $S(K, U) := \{f : X \to Y | f(K) \subset U\}$라고 하면
$\mathfrak{S} := \{S(K, U) | K^{compact} \subset X, U^{open} \subset Y\}$를 subbasis 로 갖는 Y^X의 topology를 **compact-open topology** 라고 한다.

숙제 11
1. Y is Hausdorff $\Rightarrow Y^X$ is Hausdorff.
2. Let (Y, d) be a bounded metric space. Then Show that $id : Y_d^X \to Y^X$ is

continuous.(여기서 Y_d^X는 metric topology가 주어진 공간이고 Y^X는 compact-open topology가 주어진 공간이다.)
3. Let X be a compact Hausdorff space and Y be a bounded metric space. Then $Y_d^X = Y^X$, i.e., topology of uniform convergence is same as compact-open topology.(물론 2의 결과로 부터 topology of uniform convergence 가 compact-open topology보다 finer하다는 것을 안다.)

정리 1 *Let $\varphi : Z \times X \to Y$ and let $\hat{\varphi} : Z \to Y^X$ be the induced map defined by $\hat{\varphi}(z)(x) = \varphi(z,x)$. Then*
1) If φ is continuous, then $\hat{\varphi}$ is continuous.
2) If X is locally compact Hausdorff, then φ is continuous if and only if $\hat{\varphi}$ is continuous.

증명 1) $\hat{\varphi}$가 continuous 인 것을 보이는 것은 주어진 $\hat{\varphi}_z \in S(K,U)$에 대해서 $\hat{\varphi}(V) \subset S(K,U)$인 z의 neighborhood V 가 존재함을 보이는 것과 같은 것인데,
φ is continuous $\Rightarrow \exists V$, a neighborhood of z such that $\varphi(V \times K) \subset U$ (예전에 했던 것처럼 K의 compactness를 이용해서 유한개의 product neighborhood를 subcover한 후 V를 선택) $\Rightarrow \hat{\varphi}(V) \subset S(K,U)$ 이므로 $\hat{\varphi}$는 continuous 이다.



2) 주어진 $\varphi(z,x) \in U^{open} \subset Y$에 대해서 $\varphi(V_z \times W_z) \subset U$를 만족시키는 W_z와 V_z가 존재함을 보이자.
먼저 X가 locally compact Hausdorff 이므로 $\hat{\varphi}_z(\bar{W}_z) \subset U$를 만족시키는 x 의 relatively compact neighborhood W_z가 존재하는 것을 안다. 즉 $\hat{\varphi}_z \in S(\bar{W}_z, U)$. 또한 $\hat{\varphi}$가 continuous이므로 $\hat{\varphi}(V_z) \in S(\bar{W}_z, U)$를 만족시키는 z의 neighborhood V_z가 존재하는 것을 알고 따라서 $\varphi(V_z \times W_z) \subset U$이다.
□

따름정리 2 *X is locally compact Hausdorff. Then $Y^X \times X \xrightarrow{ev} Y$ (evaluation) is continuous.*

증명 $\hat{ev} : Y^X \to Y^X$ is an identity map and apply the above theorem. $\square$
exercise X is a locally compact Hausdorff space. Then $Y^{X\times Z} \to (Y^X)^Z$ is a homeomorphism.

이제 다시 $\pi_n(X, x_0)$로 돌아가자.

Now $\Omega(X, x_0) = (X, x_0)^{(I,\partial I)} \subset X^I$.
Compare $\pi_2(X, x_0)(= F_2(X, x_0)/\sim)$ and $\pi_1(\Omega(X, x_0), x_0)(= \Omega(\Omega(X, x_0), x_0)/\sim)$. 그러면

$$\begin{array}{l} \alpha : I_1 \times I_2 \to X \overset{1-1}{\leftrightarrow} \hat{\alpha} : I_1 \to X^{I_2} \text{의 관계에 의해서} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \searrow \quad \cup \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Omega(X, x_0) \end{array}$$

$\alpha \in F_2(X, x_0) \Leftrightarrow \hat{\alpha} : (I, \partial I) \to (\Omega(X, x_0), x_0) \Leftrightarrow \hat{\alpha} \in \Omega(\Omega(X, x_0), x_0)$ 가 성립한다. 또한 앞의 정리에 의해서 $\hat{\alpha}$는 continuous이다. 즉

$\wedge : F_2(X, x_0) \overset{1-1}{\leftrightarrow} \Omega(\Omega(X, x_0), x_0)$이다.

또한 $\alpha, \beta \in F_2(X, x_0)$에 대해서
  $\exists H : I^2 \times I \to X$, homotopy between α and β $\qquad (I^2 = I_1 \times I_2)$
$\overset{bythm}{\Longleftrightarrow} \hat{H} : I_1 \times I \to X^{I_2}$, homotopy between $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$
이 성립하므로 $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$이 된다.

따라서 $\wedge : \pi_2(X, x_0) \overset{1-1}{\leftrightarrow} \pi_1(\Omega(X, x_0), x_0)$이다.

마지막으로

$$\hat{\alpha} * \hat{\beta}(s) = \begin{cases} \hat{\alpha}(2s) = \alpha(2s, -) \\ \hat{\beta}(2s-1) = \beta(2s-1, -) \end{cases}$$

이 되므로 $\hat{\alpha} * \hat{\beta}(s) = \alpha * \beta(s, -) = \widehat{\alpha * \beta}(s)$가 되어 $\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\alpha} * \hat{\beta}$가 성립한다.

$$\boxed{\wedge \text{ is a canonical isomorphism between } \pi_2(X, x_0) \text{ and } \pi_1(\Omega(X, x_0), x_0)}$$

In general, $\pi_n(X, x_0) \stackrel{\wedge}{=} \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), x_0)$

i.e. $\alpha \in F_n(X, x_0) \Leftrightarrow \alpha : I^{n-1} \times I \to X$

$$
\begin{array}{l}
\Leftrightarrow \hat{\alpha} : I^{n-1} \to X^I \\
\qquad\qquad \searrow \quad \cup \\
\qquad\qquad\quad \Omega(X, x_0)
\end{array}
$$

이는 π_2경우와 같은 방법으로 $\wedge$가 canonical isomorphism임을 알 수 있다.

따라서 $\pi_3(X) = \pi_2(\Omega(X)) = \pi_1(\Omega(\Omega(X))) = \pi_1(\Omega^2 X), \cdots$
$\pi_n(X) = \pi_1(\Omega^{n-1} X)$ 이 성립한다.