V.1 Simplicial complex in $\mathbb{R}^N$

정의 1 *$\{a_0, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ is geometrically independent(or affinely independent) if $a_1 - a_0, \cdots, a_n - a_0$ are linearly independent.*

Note. geometrically independent$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0$ with $\sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \Rightarrow t_0 = \cdots = t_n = 0$.
Affine independence is a notion in affine space, i.e., invariant under affine transformations.

정의 2 *(n-simplex)*
$\{a_0, \cdots a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ 가 geometrically independent하다고 하자. 이 때,
$\sigma =< a_0, \cdots, a_n >= \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i\ ,\ t_i \geq 0\ and\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$
=convex hull of $\{a_0, \cdots a_n\}$
=n-simplex spanned by $\{a_0, \cdots, a_n\}$라 정의한다.

Remark
(1) $t_i = t_i(x)$ for $x \in \sigma$ is uniquely determined and called a *barycentric coordinate* of x, and t_i is a continuous function of $x \in \sigma$.
(2) a_i=vertex of σ, n=dimσ일 때 a simplex spanned by a subset of $\{a_0, \cdots a_n\}$ is called a *face* of σ.
$\overset{\circ}{\sigma} := int(\sigma) = \{x \in \sigma \mid t_i(x) > 0\,,\, t_i = 0, \cdots, n\}$.
$\partial\sigma$:=boundary of $\sigma = \sigma - \overset{\circ}{\sigma} = \{x \in \sigma \mid t_i(x) = 0,\ for\ some\ i\}$
(3) $\forall x \in \sigma$, $\exists!$ face τ of σ(denoted by $\tau < \sigma$) such that $x \in \overset{\circ}{\tau}$.Indeed,
$\tau =< a_{i_0}, \cdots, a_{i_k} \mid t_{i_j}(x) > 0\,,\ \ j = 0, \cdots, k >$. Therefore $\sigma = \coprod_{\tau < \sigma} \overset{\circ}{\tau}$

정의 3 *(Simplicial complex)*
A simplicial complex K in $\mathbb{R}^N$ is a collection of simplices in $\mathbb{R}^N$ such that
(1)$\tau < \sigma$, $\sigma \in K \Rightarrow \tau \in K$, and
(2)$\sigma, \tau \in K \Rightarrow \sigma \cap \tau < \sigma$ and $\sigma \cap \tau < \tau$.

정의 4 *(Subcomplex, Dimension, p-skeleton)*
(1) $L \subset K$ is a subcomplex (denoted by $L < K$) if L is a simplicial complex in its own right.
(2) $dimK := max\{dim\, \sigma | \sigma \in K\}$.

(3) $p-skeleton$ of $K := K^p$ =the subcomplex consisting of all simplices of K of $\dim \leq p$.

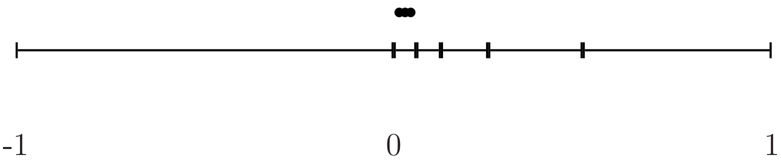
주어진 simplicial complex K에 대해 $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \subset \mathbb{R}^N$ 를 생각해보자. $|K|$에 topology를 다음과 같이 준다.
Topology of $|K|$:
(1)each of σ has the usual induced subspace topology in $\mathbb{R}^N$.
(2)$A \subset |K|$ is closed (open, respectively) if $A \cap \sigma$ is closed(open, respectively) in σ, $\forall \sigma \in K$.
$|K|$의 closed set을 (2)와 같이 정의하면 이는 $|K|$에 topology 구조를 주고 이를 weak (or coherent) topology 라고 부른다. 또한 $|K|$ with a weak topology 를 K의 underlying space(or a polytope) 라고 한다.

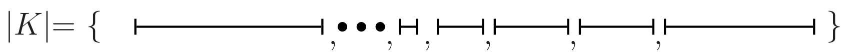
숙제 14. 일반적으로 어떤 집합 X에서 $S_\alpha \subset X, \forall \alpha$ 이고 각 S_α는 topological spaces일 때, 다음 조건을 만족한다고 하자.
1.$S_\alpha \cap S_\beta$ is open(closed, respectively) in S_α and S_β , $\forall \ \ \alpha, \beta$
2.topology on $S_\alpha \cap S_\beta$ induced from S_α= topology on $S_\alpha \cap S_\beta$ induced from S_β
이 때 $X = \bigcup_\alpha S_\alpha$ 에 다음과 같이 topology를 정의할 수 있다.
$A \subset X$ is open(closed, respectively) if $A \cap S_\alpha$ is open(closed, respectively) in each S_α.
그러면 이런 A들은 X상에 topology를 잘 정의하게 되고 다음을 만족한다.
the subspace topology of S_α as a subset of X=the original topology of S_α.

이 topology를 $\{S_\alpha\}$에 의해 induced된 weak or coherent topology라고 부른다.
그리고 X가 polytope 과 homeomorphic 할 때 X를 polyhedron이라고 한다.

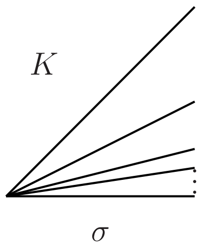
Note. The weak topology of $|K|$ is finer than the subspace topology of $|K| \subset \mathbb{R}^N$, i.e., $id : |K|_w \to |K|_s$ is continuous.
(증명) $A \subset |K|$ 가 closed in $|K|_s$ 이면 A는 subspace topology 로 closed이고 $A \cap \sigma$는 σ에서 closed이다. 따라서 A는 weak topology로 closed이다.

Examples.
1 . $[0, 1]$





$(0,1]$은 subspace topology로 보면 K에서 open이지만, weak topology로 보면 이는 closed이다. 왜냐하면 K의 각 simplex들과 $(0,1]$과의 교집합은 $\emptyset$ 혹은 simplex 자신으로 나오므로 이는 closed이다.
2 .



σ에 대해 $\mathring{\sigma}$는 $|K|_w$에서 open 이다. 왜냐하면 $\mathring{\sigma}$와, σ를 제외한 나머지 τ 와의 교집합은 모두 $\emptyset$ 이고 이는 τ에서 open이다. 또한 σ와의 교집합은 $\mathring{\sigma}$ 인데 이 역시 σ에서 open이므로 $\mathring{\sigma}$는 $|K|_w$에서 open 이다.
하지만 $\mathring{\sigma}$는 $|K|_s$에서 open 이 아니다. subspace topology 로 봤을 때, $\mathring{\sigma}$상의 한 점에서 어떤 근방을 잡아도 다른 simplex $\tau \in K$ 와 만나므로 interior point가 될 수 없다. 따라서 $\mathring{\sigma}$는 open일 수가 없다.
3 . If K is a *finite* simplicial complex in $\mathbb{R}^N$, then

weak topology of $|K|$=subspace topology of $|K|$.

증명($\supseteq$)는 이미 앞에서 보였고, ($\subseteq$)를 보이면 된다. F를 $|K|_w$ 에서 closed인 subset 이라고 하자. 그러면 모든 σ에 대해 $F \cap \sigma$ 는 σ에서 closed이고, σ 는

$\mathbb{R}^N$에서 closed 이므로 $F \cap \sigma$ 는 $\mathbb{R}^N$에서 closed이다. 그러면, $F = \bigcup_{\sigma}(F \cap \sigma)$ 이므로 closed subset의 finite union은 역시 closed하다는 성질에 따라 F는 $\mathbb{R}^N$에서 closed이다. $\square$

Simplicial complex in $\mathbb{R}^J$
Let J be an arbitrary index set and $\mathbb{R}^J = \{f : J \to \mathbb{R}\}$.
Write f as $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ $\quad, i.e., f(\alpha) = x_\alpha$.

$\mathbb{R}^J$ is a vector space with the usual addition and scalar multiplication.
$\mathbb{E}^J := \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \in \mathbb{R}^J | x_\alpha = 0$ for all but finitely many α's $\}$

Topology of $\mathbb{E}^J$:
Define a metric on $\mathbb{E}^J$ by $|x - y| = max\{|x_\alpha - y_\alpha||\alpha \in J\}$.
Then $\mathbb{E}^J$ with this topology is called a generalized Euclidean space.

Note $span\{e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_N}\} \cong \mathbb{R}^N$(as a topological vector space) and a simplex $\sigma =< a_0, \cdots, a_n >$ in $\mathbb{E}^J$ can be viewed as a simplex in $\mathbb{R}^N$.

All the previous definitions go through for a simplicial complex in $\mathbb{E}^J$.
$\mathbb{R}^\infty := \mathbb{E}^N$.