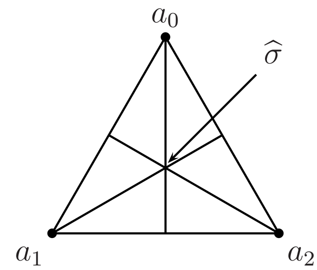
V.3 Simplicial approximation theorem

Barycentric subdivision

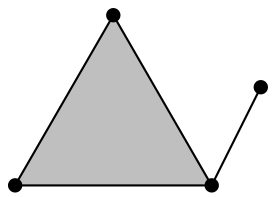
Given $\sigma = < a_0, \cdots, a_n > \subset \mathbb{R}^N$, the ***barycenter*** $\widehat{\sigma}$ of σ is defined by

$$\widehat{\sigma} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i.$$

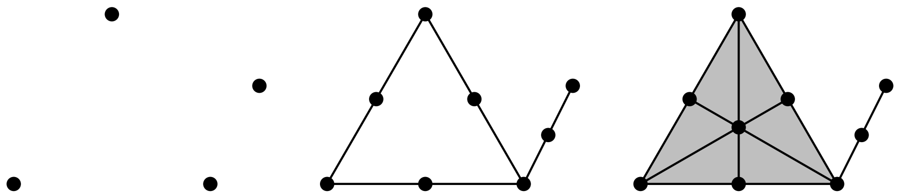


정의 1 Let K be a simplicial complex in $\mathbb{R}^N$, the ***baricentric subdivision*** of K, denoted by sdK, is defined inductively as follows

1. $L_0 := V(K)$.
2. Given L_p, L_{p+1} is the simplicial complex determined by $\displaystyle\bigcup_{\sigma \in K^{p+1}} \{\widehat{\sigma} * \partial\sigma\}$
   where $\partial\sigma$ is viewed as a subcomplex of L_p.
3. $sdK = \bigcup L_p$.



K



L_0 $\quad$ L_1 $\quad$ L_2

Note. Abstractly,

1. $V(sdK) = \displaystyle\bigcup_{\sigma \in K} \{\widehat{\sigma}\}$
2. $sdK = \{< \widehat{\sigma}_1, \cdots, \widehat{\sigma}_p > \mid \sigma_1 < \cdots < \sigma_p, p = 1, 2, \cdots, \sigma_i \in K\}$,
   where $<$ denotes proper face.
3. $|sdK| = |K|$ as a topological space.

정의 2 K : a finite simplicial complex in $\mathbb{R}^N$.

$mesh(K) = max\{diam(\sigma) \mid \sigma \in K\}$.

정리 1

(1) σ *: n-simplex in* $\mathbb{R}^N \Rightarrow mesh(sd\sigma) \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$.

(2) K *: n-dimensional finite simplicial complex in* $\mathbb{R}^N$

$\Rightarrow mesh(sdK) \leq \frac{n}{n+1} mesh(K)$

증명 (2)는 (1)의 내용과 $\frac{x}{x+1}$이 증가함수라는 사실로부터 바로 나오므로, (1)을 증명하자. 이를 증명하기에 앞서 다음 Note를 살펴보자.

Note. 1. $\forall\ \sigma,\ \exists$ an edge $e < \sigma$, such that $diam(\sigma) = length(e)$.

2.$\forall\ x \in \sigma,\ \mid \hat{\sigma} - x| \leq \mid \hat{\sigma} - v|$ for some vertex v of σ, and

$$\mid \hat{\sigma} - v_0| = \mid v_0 - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} v_i| = \mid \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(v_i - v_0)| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} \mid v_i - v_0|$$
$$\leq \frac{n}{n+1} max| \ v_i - v_0| \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$$

이제 (1)의 증명을 하자. $\forall \tau \in sd(\sigma)$에 대해 τ의 모든 edge e는 barycenter에서 혹은 face의 barycenter에서 나가므로 Note 2에 의해 $length(e) \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$ 이다. 따라서 Note 1에 의해 $mesh(\tau) \leq \frac{n}{n+1} mesh(\sigma)$ 이다. □

따름정리 2 $mesh(sd^N K) \leq C(\frac{n}{n+1})^N$ *and converge to* 0 *as* $N \to \infty$.

Note. $g : K \to L$, a simplicial map

$\Rightarrow g(st(v)) \subset st(g(v)),\ \forall v \in V(K)$.

증명 $x \in st(v) \Leftrightarrow t_v(x) > 0$.

g가 simplicial map이므로 $t_{g(v)}(g(x)) \geq t_v(x)$이고 따라서 $x \in st(v)$이면 $t_{g(v)}(g(x)) > 0$이고 $g(x) \in st(g(v))$. □

명제 3 *Let* $f : |K| \to |L|$ *be a map and* $g : |K| \to |L|$ *be a simplicial map. Then the followings are equivalent.*

(1) $\forall\, x \in |K|,\ f(x) \in \mathring{\tau} \Rightarrow g(x) \in \tau$.

(2) $\forall\, x \in |K|,\ f(x) \in \tau \Rightarrow g(x) \in \tau$.

(3) $v \in V(K), f(st(v)) \subset st(g(v))$.

정의 3 Such simplicial map g is called a ***Simplicial approximation*** of f.

증명 (2)$\Rightarrow$(1)은 당연하다.

(1)$\Rightarrow$(3) $x \in st(v), f(x) \in \mathring{\tau}$ 라 놓자. 가정으로부터 $t_v(x) > 0,\ g(x) \in \tau$이다.

이때, $t_{g(v)}(g(x)) \geq t_v(x) > 0$이므로, $g(x) \in st(g(v))$이다. 그런데 $g(x) \in \tau$임을 알고 있으므로, $g(v)$는 τ의 vertex이고, $\overset{\circ}{\tau} \subset st(g(v))$이다. 따라서 $f(x) \in \overset{\circ}{\tau} \subset st(g(v))$.
(3)⇒(2) $x \in \overset{\circ}{\sigma}$ 이고, $f(x) \in \tau$라고 가정하자. 이 때, 임의의 $v \in V(\sigma)$ 에 대해 $x \in st(v)$이다. $f(st(v)) \subset st(g(v))$로부터 $f(x) \in st(g(v))$ 이고 따라서 $g(v)$는 τ의 vertex가 된다. 임의의 $v \in V(\sigma)$에 대하여 성립하므로, $g(\sigma) \subset \tau$ 이고 $g(x) \in \tau$이다. □

정리 4 *Let* $f : |K| \to |L|$ *be a map which satisfies "star condition", i.e.,*
$\forall\, v \in V(K),\ \exists\, w \in V(L)$ *such that* $f(st(v)) \subset st(w)$.
Then there exists $g : K \to L$ *which is a simplicial approximation of* f.

증명 모든 $v \in V(K)$에 대해 $f(st(v)) \subset st(w)$를 만족하는 아무런 w 를 선택하여 $g(v) = w$로 정의하자.
이제 이 g가 simplicial map임을 보이기 위해 $< v_0, \cdots, v_k >$가 simplex이면, $< g(v_0), \cdots, g(v_k) >$가 simplex임을 보이자. simplex $\sigma =< v_0, \cdots, v_k >$로 놓으면 $x \in \overset{\circ}{\sigma}$가 존재하고, $x \in \bigcap_{i=0}^{k} st(v_i)$이다.
이 때, $f(x) \in f(\bigcap st(v_i)) \subset \bigcap f(st(v_i)) \subset \bigcap st(w_i)$, $w_i = g(v_i)$이 되어 모든 i에 대해 $t_{w_i}(f(x)) > 0$이다. 따라서 $< w_0, \cdots, w_k >=< g(v_0), \cdots, g(v_k)) >$는 simplex를 형성한다.(interior point $f(x)$가 존재하므로). 따라서 g는 simplicial map이 되고 $f(st(v)) \subset st(g(v))$ 를 만족하므로 앞의 명제 3의 (3)을 만족하여 g는 f의 simplicial approximation이 된다. □

Remark. $f : |K| \to |L|$가 K의 subcomplex M에서 이미 simplicial map이라고 하자. 그러면 위 정리의 증명과정에서 g를 잡을 때, M에서의 값은 그대로 주고 (앞 Note에서 simplicial map은 star condition을 만족하므로) 나머지 부분만 정리의 증명처럼 하면 되므로 $g|_{|M|} = f|_{|M|}$이 되도록 approximation g를 잡을 수 있다.

정리 5 (Simplicial approximation theorem)
K, L *: finite simplicial complexes in* $\mathbb{R}^N$.
(1) Given a map $f : |K| \to |L|$, $\exists N > 0$ *such that* f *has a simplicial approximation* $g : sd^N K \to L$.
(2) If g *is a simplicial approximation of* f, $f \simeq g$.

증명 (1) $\mathcal{U} = \{f^{-1}(st(w)) \mid w \in V(L)\}$은 $|K|$의 open covering이 된다. K가 finite이므로 $|K|$는 compact이고 따라서 open covering $\mathcal{U}$에 대해 Lebesgue number ϵ이 존재한다. 이 때, $mesh(sd^N K) < \frac{\epsilon}{2}$ 를 만족하도록 N을 충분히 크

게 잡으면 $sd^N K$ 안의 각 star들은 diam이 ϵ보다 작고 따라서 어떤 $U \in \mathcal{U}$에 포함된다. 그러면 $f : |sd^N K| \to |L|$은 star condition을 만족하고 $|sd^N K| = |K|$이므로 정리 4에 의해 simplicial approximation g가 존재한다.
(2) f와 g사이의 homotopy를 $F : |K| \times I \to |L|$, $F(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$로 정의한다. 먼저 명제 3에 의해 각 $f(x)$와 $g(x)$는 같은 simplex 안에 있으므로 F는 잘 정의된다. 또한 각 simplex σ에서 f와 g는 연속이므로 F는 $|\sigma| \times I$에서 연속이다. K가 finite이므로 F는 연속이다. 따라서 F는 원하는 homotopy이다.

$\square$

Remark.
1. Theorem 5 holds for arbitrary simplicial complexes K and L, and for a suitable subdivision (satisfying mesh condition in the proof) K' of K.
(Reference: Munkres, 16.5, 19.4, 20.5)
2. In general, The topology of $|K| \times I$ is coherent with the subspaces $\{|\sigma| \times I \mid \sigma \in K\}$. (see Munkres, Elements of algebraic topology.) (**숙제 16.**)