Application

1 . $\pi_k(S^n)$**=0, if** $k < n$**.**

증명 simplicial approximation 정리와 $S^n \setminus \{point\} \simeq \mathbb{R}^n$이 contractible이라는 것을 이용하자. S^k에서 S^n으로 가는 α가 onto만 아니라면, S^n상에서 α의 image가 아닌 점 x_0 를 생각할 수 있고 $S^n \setminus \{x_0\} \simeq \mathbb{R}^n$이 contractible이므로 증명이 완성된다.
먼저 simplicial map 자체는 p-skeleton 을 p-skeleton 으로 보내므로 α의 simplicial approximation α'는 onto가 될 수 없고, 따라서 α'은 한 점으로 contractible 하고 $\alpha \simeq \alpha'$ 이므로 α 도 contractible하다.
이 증명에서 base point는 vertex가 되도록 simplicial complex 구조를 S^k와 S^n에 적당히 준다. 앞절 정리의 Remark에 의해 $\alpha(base\ point) = \alpha'(base\ point)$라 두어도 상관없고, 앞절 정리 5증명에서 homotopy F가 base point를 fix한다고 가정하여도 좋다.

□

2 . $i : K^{k+1} \hookrightarrow K$ **induces an isomorphism** $i_* : \pi_k(|K^{k+1}|) \to \pi_k(|K|)$**.**

증명 먼저 simplicial approximation thoerem을 이용하면 epimorphism 이 되는 것은 위 증명에서 처럼 자명하다. 이제 1-1 임을 보이자. 1-1 임을 보이기 위해 이전에 보였던 다음 note를 이용하자.

Note. *$\alpha : S^k \to X$ represent a zero element in $\pi_k(X)$ if and only if*
$\exists$ extension $\overline{\alpha} : B^{k+1} \to X$.

어떤 $\{\alpha\} \in \pi_k(|K^{k+1}|)$ 가 i_*에 의해 identity 로 간다면, 위의 note 에 의해 extension $\overline{\alpha}$ 가 존재하고 다음 diagram 이 성립한다.여기서 처음부터 α를 simplicial이라 가정해도 상관없다.

$$\begin{array}{ccc} |K^{k+1}| & \to & |K| \\ \alpha\uparrow & & \\ S^k & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} |K^{k+1}| & \to & |K| \\ \alpha\uparrow & & \uparrow \exists\overline{\alpha} \\ S^k & \subset & B^{k+1} \end{array}$$

여기서 $\overline{\alpha}$의 simplicial approximation $\overline{\alpha}'$를 잡으면

$$\begin{array}{ccc} K^{k+1} & \to & K \\ \exists\overline{\alpha'} \nwarrow & & \\ & B^{k+1} & \end{array}$$

가 되고 이 때 앞절 정리의 remark에 의해서 $\{\overline{\alpha}'|_{S^k}\} = \{\alpha\}$ 라 두어도 된다. 그런데 $|K^{k+1}|$에서 $\{\overline{\alpha}'|_{S^k}\} = 0$ 이므로 $\{\alpha\} = 0$ 이다. 따라서 1-1임을 보였다.

3. Edge-path group
$v_0 \in V(K)$에 대해서

$\Omega_s(K, v_0)$=the set of closed edge-paths based at v_0
$=\{v_0 v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_0 \mid v_i \in V(K)$ and $\{v_0, v_{i_1}\}, \cdots, \{v_{i_k}, v_0\}$: 1-simplices in $K\}$

이제 $\Omega_s(K, v_0)$에 equivalence relation $\overset{s}{\sim}$를 다음 3가지 equivalence에 의해 generate된 것으로 주자.
(1) $\cdots v_i v_i \cdots \overset{s}{\sim} \cdots v_i \cdots$
(2) $\cdots v_i v_j v_i \cdots \overset{s}{\sim} \cdots v_i \cdots$
(3) $\cdots v_i v_j v_k \cdots \overset{s}{\sim} \cdots v_i v_k \cdots$ if $< v_i, v_j, v_k >$ is a 2-simplex in K

이 때 $\Omega_s(K, v_0)/\overset{s}{\sim} := E(K, v_0)$를 (K, v_0)의 edge path group이라고 한다. 이 때 group operation은 juxtaposition 이다.

$E(K, v_0)$ 가 group이 됨을 보이자. 먼저
$((v_0 v_{i_1} \cdot\cdot v_0)(v_0 v_{j_1} \cdot\cdot v_0))(v_0 v_{k_1} \cdot\cdot v_0) = (v_0 v_{i_1} \cdot\cdot v_0)((v_0 v_{j_1} \cdot\cdot v_0)(v_0 v_{k_1} \cdot\cdot v_0))$
는 위 세가지 equivalence 에 대해 성립하므로 결합법칙을 만족하고,
$\{v_0\} \in E(K, v_0)$ 가 group operation의 identity 가 된다. 그리고$(v_0 v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_0) \in E(K, v_0)$에 대해 inverse는 $(v_0 v_{i_k} \cdots v_{i_1} v_0)$가 된다. 따라서 $E(K, v_0)$ 는 group 이 된다.

정리 1 $E(K, v_0) \cong \pi_1(|K|, v_0)$

증명 두 group사이의 isomorphism을 찾기 위해 먼저 다음 함수를 생각하자.
$$\begin{array}{cccc} \phi : & \Omega_s(K, v_0) & \to & \Omega(|K|, v_0)/\sim \\ & v_0 v_{i_1} \cdots v_{i_{k-1}} v_0 & \mapsto & \{\alpha\} \end{array}$$

where $\alpha : I \to |K|$ is a piecewise linear map representing simplicial loop corresponding to $v_0, v_{i_1}, \cdots v_{i_k}, v_0$.

이 ϕ에 의해 induce되는 $\phi_\sharp : \Omega_s/\overset{s}{\sim} \to \Omega/\sim$을 얻을 수 있고, 이 때 다음 네 가지를 보이자.

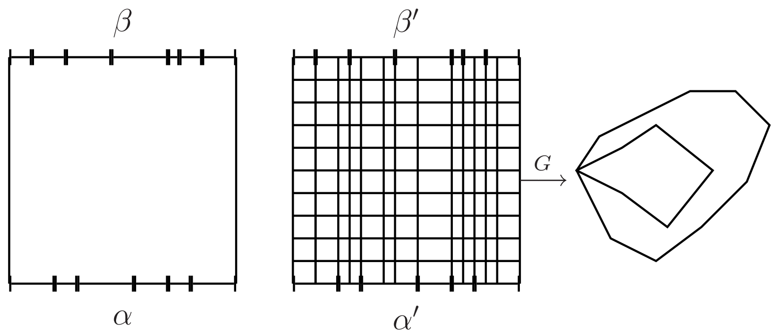
(1) $\phi_\sharp$ is well defined :
첫번째 equivalence relation $\overset{s}{\sim}$에 대해 $\phi_\sharp(v_0 \cdot\cdot v_i v_i \cdot\cdot v_0) = \phi_\sharp(v_0 \cdot\cdot v_i \cdot\cdot v_0)$ 임을 알 수 있고, 나머지 두개에 대해서도 마찬가지로 확인할 수 있다.

(2) $\phi_\sharp$ is a homomorphism :

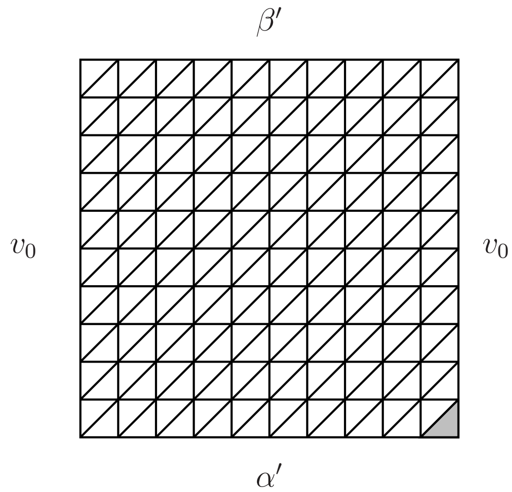
$\phi(v_0v_{i_1}\cdot\cdot v_0) = \alpha$ 와 $\phi(v_0v_{j_1}\cdot\cdot v_0) = \beta$ 에 대해 $\phi((v_0v_{i_1}\cdot\cdot v_0)\cdot(v_0v_{j_1}\cdot\cdot v_0))$ 은 juxtaposition에 의해 α와 β의 juxtaposition으로 가고 이는 $\phi((v_0v_{i_1}\cdot\cdot v_0))\cdot\phi((v_0v_{j_1}\cdot\cdot v_0))$ 와 같다.

(3) $\phi_\sharp$ is onto :
임의의 $\alpha \in \pi_1(|K|, v_0)$에 대해 α의 simplicial approximation $\overline{\alpha}$ 가 존재한다. $\phi_\sharp(\overline{\alpha}) = \alpha$ 가 되어 onto이다.

(4) $\phi_\sharp$ is 1-1 :
$\alpha\,,\,\beta \in \Omega_s$에 대해 $\phi_\sharp(\alpha) \sim \phi_\sharp(\beta)$이라고 가정하고 $\alpha \overset{s}{\sim} \beta$ 임을 보이자. 먼저 α, β 에 대해 각각 다음과 같이 α', β'을 잡자. $\phi_\sharp(\alpha)$와 $\phi_\sharp(\beta)$ 사이의 homotopy F , $F(0,t) = \alpha(t), F(1,t) = \beta(t)$에 대해 F의 simplicial approximation(G라 두자)이 존재하도록 다음과 같이 subdivision한다.



여기서 $G(0,t) = \alpha'(t), G(1,t) = \beta'(t)$ 으로 두었을 때, $\alpha \overset{s}{\sim} \alpha', \beta \overset{s}{\sim} \beta'$라 가정하여도 무방하다. 왜냐하면, α의 한 소구간이 1-simplex $< v, w >$로 갔다면, 이것의 subdivision은 예컨대 $< v, w >, < w, w >, \cdots < w, w >$로 보내면 $\alpha \overset{s}{\sim} \alpha'$이고 $\phi(\alpha) = \phi(\alpha')$이 된다. $\phi(\alpha')$와 $\phi(\beta')$사이의 homotopy F의 simplicial approximation G는 α', β'가 이미 simplicial 이므로 $G_0 = \alpha'$이고 $G_1 = \beta'$라고 가정해도 좋다. 따라서 $\alpha' \overset{s}{\sim} \beta'$를 보이면 $\alpha \overset{s}{\sim} \beta$임을 보일 수 있다.

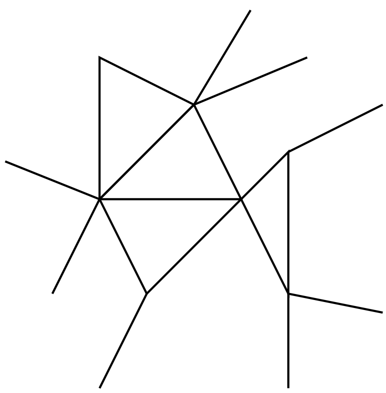


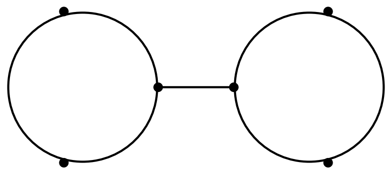
위 그림에서 빗금친 삼각형부터 하나씩 $\overset{s}{\sim}$을 적용하면, $\alpha' \overset{s}{\sim} \beta'$ 임을 알 수 있다.

$\square$

4. Graph

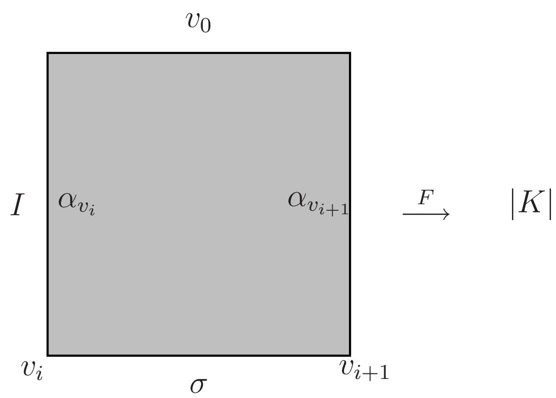
A 1-dimensional simplicial complex is called a graph.
A simply connected simplicial complex is called a tree.





보조정리 2 *A graph K is a tree if and only if it is contractible.*

증명
($\Leftarrow$) clear.
($\Rightarrow$) Fix $v_0 \in V(K)$.$\forall v \in V(K)$, choose a path α_v from v to v_0.
Define $F : V \times I \to |K|$ by $F(v,t) = \alpha_v(t)$.Then
For each edge σ, define $F : |\sigma| \times I \to |K|$ as the following picture.



여기서 $|K|$가 simply connected이고 이미 boundary condition을 알고 있으므로 $|\sigma| \times I$의 내부로 extend시킬 수 있음에 주의하자.
그러면 $F|_{|\sigma|\times I}$가 연속이므로 $F : |K|\times I \to |K|$도 연속이고 $F_0 = id, F_1 = v_0$이므로 contractible인 것을 확인하였다.

$\square$

보조정리 3 *Let K be a connected simplicial complex. Then*
(1) K contains a maximal tree.
(2) Every maximal tree contains all the vertices of K.

증명
(1) Use Zorn's lemma.

Let $\mathcal{T}$ be the collection of all the trees in K. Then $\mathcal{T}$ is a partially ordered set with respect to inclusion.
Let $\{T_j\}$ be a simply ordered set of trees in K. And $T = \bigcup T_j$. Then T is simply connected.
$\because$ For given $\alpha : S^1 \to T, \alpha(S^1)$ is compact. Hence it is contained T_j for some

j. Consequently, $\alpha \simeq const.$ in T_j, hence in T.

By Zorn's lemma, there exists a maximal element in $\mathcal{T}$.

(2) Let T be the maximal tree. Suppose that T does not contain all the vertices of K. Then $\exists v_1, v_2 \in V(K)$ s.t $v_1 \in T$ and $v_2 \notin T$ and $\{v_1, v_2\}$ is a 1-simplex in K.

$T_1 := T \cup \{\{v_1, v_2\}, \{v_2\}\}$. Then $|T|$ is a strong deformation retract of $|T_1|$. Hence T_1 is simply connected and hence a tree containing T properly. This contradicts to the normality of T.

□

Note (1) In fact, given a tree T, $\exists$ a maximal tree containing T.
(2) A tree containing all the vertices of K is maximal.

(1)의 증명은 lemma의 증명과 같은 것이고, (2)는 edge-path group을 참조하면 쉽게 확인할 수 있다.(exercises)

Let T be a maximal tree in K.
Let G be the group generated by the oriented edges (v, v') of K with the following relations.

(a) $(v, v') \in T \Rightarrow (v, v') = 1$
(b) $(v, v')(v', v) = 1$
(c) v_1, v_2, v_3 are vertices of a 2-simplex in K.Then
$(v_1, v_2)(v_2, v_3) = (v_1, v_3)$

정리 4 $E(K, v_0) \cong G = F/R$

증명

$\phi : E(K, v_0) \longrightarrow G$라고 정의하면,
$[v_0 v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k} v_0] \mapsto (v_0 v_{i_1})(v_{i_1} v_{i_2}) \cdots (v_{i_k} v_0)$
이는 junxtaposition과 equivalence relation을 보존하므로 잘 정의된다.또

$\psi : F \longrightarrow E(K, v_0)$를 정의하자.
$(v, v') \mapsto \alpha_v v v' \alpha_{v'}^{-1}$
이 때 각 vertex v마다 v_0에서 v로 가는 simplicial path α_v를 T에서 선택하고 고정시키자. T가 모든 vertex를 다 포함하므로 ψ는 R의 원소들을 모두 0으로 보내므로

$F/R \xrightarrow{\bar{\psi}} E(K, v_0)$를 induce한다.
$\phi \circ \bar{\psi} = id.\quad \bar{\psi} \circ \phi = id.$임은 쉽게 알 수 있으므로 정리가 증명되었다.

$\square$

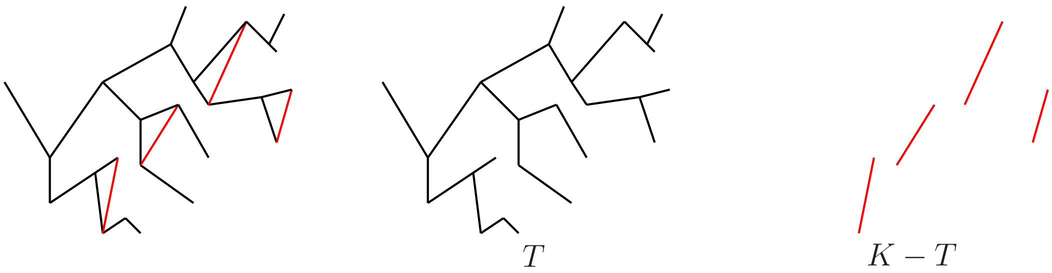
따름정리 5 *Let K be a finite connected simplicial complex. Then $\pi_1(|K|, v_0)$ is finitely presented.*

증명
$\pi_1(|K|, v_0) = E = G$인데 edge의 갯수가 유한이므로 generator의 갯수도 유한이고, G의 relation이 유한이므로 relation의 갯수도 유한이다. 따라서 finitely presented이다.

$\square$

따름정리 6 *Let K be a connected graph. If T is a maximal tree in K, then $E(K, v_0)$ is a free group generated by the 1-simplices in $K - T$.*

증명 이는 G의 정의에 의해서 당연하다.



$\square$

Note Let K be a finite connected graph, n_1 be the number of 1-simplices in K and n_0 be the number of 0-simplices in K. Then
The number of 1-simplices in $K - T = n_1 - (n_0 - 1) = 1 - (n_0 - n_1) = 1 - \chi(K)$.

정리 7 *Let $p : \widetilde{X} \to X$ be a covering. If $X = |K|$ for some simplicial complex K, then the simplicial complex structure of X can be lifted to $\widetilde{X}$ in such a way that p becomes a simplicial map.*

증명
simplex의 fundamental group은 trivial이다. 따라서 lifting할 수 있고 $\widetilde{X}$에서도 locally 똑같이 할 수 있다.

숙제 18 (Prove in detail.)

$\square$

따름정리 8 *1. Any subgroup of a free group is free.*
2. Let F be a free group on n generators and F' be a subgroup of F of index m. Then F' is a free group in $1 - m + mn$ generators.

증명
1. $\exists K$, a connected graph such that $\pi_1(|K|) = F$.
$F' < F \Rightarrow \exists$ a covering K' of K such that $\pi_1(K') = F'$ and K' is also a graph.
$\Rightarrow F'$ is free.

2. Can take K as a finite graph.
$n = 1 - \chi(K)$ and $\chi(K') = m\chi(K)$ 따라서 F'의 generator의 갯수는 $1 - \chi(K') = 1 - m\chi(K) = 1 - m(1-n) = 1 - m + mn$이다.

$\square$