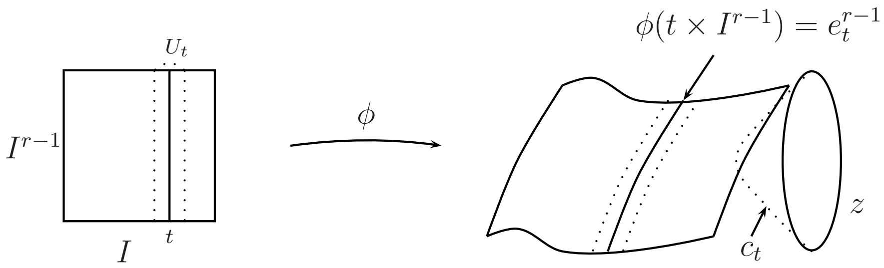
VIII. Application of Homology

1. The Jordan-Brouwer Separation theorem.

정리 1 *e^r = a closed r-cell (i.e., a homeomorph of D^r) in S^n* $\Rightarrow \widetilde{H}(S^n - e^r) = 0$.

증명 use induction on r.
$r = 0$: e^0는 한 point이므로 $S^n - e^0$는 contractible하여 당연하다.
$r > 0$: e^r이 r-cell이므로, $\phi : I^r \to e^r \subset S^n$인 homeomorphism이 존재한다.
z를 $S^n - e^r$의 임의의 reduced p-cycle이라 두자.



induction의 가정에 의하여 $\widetilde{H}(S^n - e_t^{r-1}) = 0$이므로, $\partial c_t = z$가 되는 $c_t \in S_{p+1}(S^n - e_t^{r-1})$이 존재한다. 그런데, $|c_t|$= support of c_t는 compact이므로 $d(e_t^{r-1}, |c_t|) = \epsilon_t > 0$이다. 따라서, 그림과 같이 $\phi(U_t \times I^{r-1}) \cap |c_t| = \phi$가 되는 t의 open neighborhood U_t가 존재한다.
각각의 $t \in I$에 대하여 U_t가 존재하므로 $\{U_t\}$는 compact set I의 covering이 되고 이에 대해 Lebesgue number $\frac{1}{m}$을 잡자.
$I_j = [\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}]$로 두면, I_j는 어떤 U_t에 속하므로 각각의 I_j에 대하여 $\partial c_j = z$가 되는 $c_j \in S^n - \phi(I_j \times I^{r-1})$이 존재한다. 이제 다음 claim으로부터 증명이 끝난다.

Claim Let $J_1 = [a, t]$, $J_2 = [t, b]$ for $a, b \in I$ and $e_i^r = \phi(J_i \times I^{r-1})$.
If $c_i \in S_{p+1}(S^n - e_i^r)$ is such that $\partial c_i = z$ for $i = 1, 2$, then there exists $c \in S_{p+1}(S^n - e_1^r \cup e_2^r)$ such that $\partial c = z$.

proof of Claim
$X_i = S^n - e_i^r$이라 두면, $X_1 \cup X_2 = S^n - e_t^{r-1}$, $X_1 \cap X_2 = S^n - e_1^r \cup e_2^r$이므로 다음과 같은 MV-sequence를 얻는다.

$$\cdots \to \widetilde{H}_{p+1}(X_1 \cup X_2) \to \widetilde{H}_p(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i} \widetilde{H}_p(X_1) \oplus \widetilde{H}_p(X_2) \to \cdots$$

induction의 가정에 의하여 $\widetilde{H}_{p+1}(X_1 \cup X_2) = 0$이므로 i는 injection이다. claim의 가정으로부터 $\{z\}$는 $\widetilde{H}_p(X_1)$, $\widetilde{H}_p(X_2)$에서 보면 0이고, i는 각각의 좌표에 대

한 inclusion으로부터 induce된 map이므로 $\widetilde{H}_p(X_1 \cap X_2)$에서 $\{z\} = 0$이다. $\square$

따름정리 2 $e^r \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \widetilde{H}(\mathbb{R}^n - e^r) \cong \widetilde{H}(S^{n-1})$.

증명 Exercise. $\square$

정리 3 *Let $s^r \subset S^n$ be a homeomorph of S^r. Then*
(1) $r \leq n$
(2) $r = n \Rightarrow s^n = S^n$
(3) $r < n \Rightarrow \widetilde{H}_p(S^n - s^r) = \begin{cases} \mathbb{Z}(or\ R) & , p = n - r - 1 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$

증명 가정에 의하여 homeomorphism $\phi : S^r \to s^r$이 존재한다. S^r의 (적도를 포함하는) 북반구를 E^r_+, 남반구를 E^r_-라 두고, $e^r_+ = \phi(E^r_+)$, $e^r_- = \phi(E^r_-)$라 하자. $X_+ = S^n - e^r_+$, $X_- = S^n - e^r_-$라 하면, $X_+ \cup X_- = S^n - s^{r-1}$, $X_+ \cap X_- = S^n - s^r$이다.
먼저 $S^n - s^r = \phi$인 경우에는 $S^n = s^r$이므로 $n = r$임을 알 수 있다.
$S^n - s^r \neq \phi$라면 다음의 MV-sequence를 얻는다.

$$\cdots \to \widetilde{H}_{p+1}(X_1) \oplus \widetilde{H}_{p+1}(X_2) \to \widetilde{H}_{p+1}(X_1 \cup X_2) \to \widetilde{H}_p(X_1 \cap X_2) \to \cdots$$

정리 1에 의하여 $\widetilde{H}(X_1) = \widetilde{H}(X_2) = 0$이므로,

$$\widetilde{H}_{p+1}(S^n - s^{r-1}) \cong \widetilde{H}_p(S^n - s^r)$$

을 얻는다. 이 식을 귀납적으로 적용하면,

$$\widetilde{H}_p(S^n - s^r) \cong \widetilde{H}_{p+r}(S^n - s^0)$$

임을 알 수 있다. 그런데 s^0는 2 points이므로 $S^n - s^0 \simeq S^{n-1}$이고, 따라서

$$\widetilde{H}_p(S^n - s^r) = \begin{cases} \mathbb{Z}(or\ R) & , p + r = n - 1 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

이다. 이 때, 만약 $r \geq n$이라면 $p = n - r - 1 < 0$에 대하여 $\widetilde{H}_p(S^n - s^r) = \mathbb{Z}$가 되므로 모순이다. 따라서 (1)(2)(3)이 모두 증명되었다. $\square$

따름정리 4 $s^r \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow r < n$ *and* $\widetilde{H}_p(\mathbb{R}^n - s^r) = \left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{H}_p(S^n - s^r) & ,p \neq n-1 \\ \widetilde{H}_p(S^n - s^r) \oplus \mathbb{Z} & ,p = n-1 \end{array} \right.$

증명 Exercise. □

즉,

(1) $r \neq 0 \Rightarrow \widetilde{H}_p(\mathbb{R}^n - s^r) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} & ,p = n-r-1,\ n-1 \\ 0 & ,otherwise \end{array} \right.$,

(2) $r = 0 \Rightarrow \widetilde{H}_p(\mathbb{R}^n - s^r) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & ,p = n-1 \\ 0 & ,otherwise \end{array} \right.$.

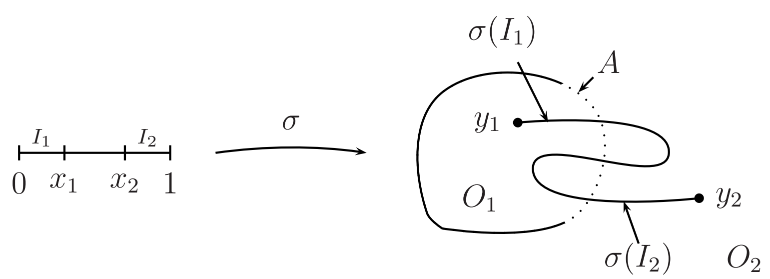
이로부터 다음의 따름정리를 얻는다.

따름정리 5 $s^r \subset S^n$ *disconnects iff* $r = n-1$
and $s^r \subset \mathbb{R}^n$ *disconnects iff* $r = n-1$.

증명 $r = n-1$이면 $\widetilde{H}_0(S^n - s^r) = \widetilde{H}_0(\mathbb{R}^n - s^r) = \mathbb{Z}$이므로 자명하다. □

정리 6 (Jordan-Brouwer Separation theorem)
For all $s^{n-1} \subset S^n$, $S^n - s^{n-1}$ *consists of 2 connected components both having* s^{n-1} *as boundary.*

증명 $\widetilde{H}_0(S^n - s^{n-1}) = \mathbb{Z}$이므로 $S^n - s^{n-1}$는 2개의 path-component를 갖는다. 이를 O_1, O_2라고 두고 각각의 boundary가 s^{n-1}임을 보이면 증명이 끝난다.
O_1, O_2는 모두 open set이므로, $x \in bdy(O_i)$라면 $x \notin O_i$가 되어 $x \in s^{n-1}$이다. 역으로 $s^{n-1} \subset bdy(O_i)$를 보기기 위해서 임의의 $x \in s^{n-1}$에 대하여 x의 임의의 open neighborhood U가 $U \cap O_i \neq \emptyset$를 만족함을 보이면 된다.
먼저 $y_1 \in O_1$, $y_2 \in O_2$를 적당히 잡는다. homeomorphism ϕ에 대해 $s^{n-1} = \phi(S^{n-1})$라 두고 $x \in A \subset U \cap s^{n-1}$를 만족하도록 $y = \phi^{-1}(x) \in S^{n-1}$의 closed ball neighborhood B와 $A = \phi(B)$를 잡으면, $e^{n-1} := s^{n-1} - \phi(\overset{\circ}{B})$는 closed $(n-1)$-cell이 된다. 따라서 정리 1에 의하여 $\widetilde{H}_0(S^n - e^{n-1}) = 0$이므로, $S^n - e^{n-1}$는 path connected이다.
y_1, y_2를 잇는 $S^n - e^{n-1}$의 path를 σ라 두자. $\emptyset \neq \sigma(I) \cap s^{n-1} = \sigma(I) \cap A$는 closed set이므로 $\sigma^{-1}(\sigma(I) \cap A)$는 closed set이고, 이의 complement W는 open interval들의 countable union이다. 이제, $I_1 = [0, x_1)$과 $I_2(x_2, 1]$을 W의 처음과 마지막 open interval이라 두자.



이제, $\sigma(I_1) \subset S^n - s^{n-1}$이고 O_1이 path component이므로 $\sigma(I_1) \subset O_1$이고, 마찬가지로 $\sigma(I_2) \subset O_2$이다. 그런데 $\sigma(x_i) \in A \subset U$이므로, $U \cap O_i \neq \emptyset$이다. $\square$

따름정리 7 *For all $s^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2 \Rightarrow \mathbb{R}^n - s^{n-1}$ has 2 connected components both having s^{n-1} as boundary.*

증명 $S^n = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$이므로 위의 정리로부터 자명하다. $\square$
이 때, ∞를 포함하는 component를 unbounded component, 그렇지않는 component를 bounded component라 부른다.

Remark
If $n = 2$, the above corollary is the Jordan Curve Theorem.

Schoenflies Theorem
If $n = 2$, $\overline{O}_1$ and $\overline{O}_2$ are closed disks. In fact, any embedding $h : S^1(\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ can be extended to a homeomorphism $\bar{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

If $n = 3$, this is not true as Alexander horned sphere shows.

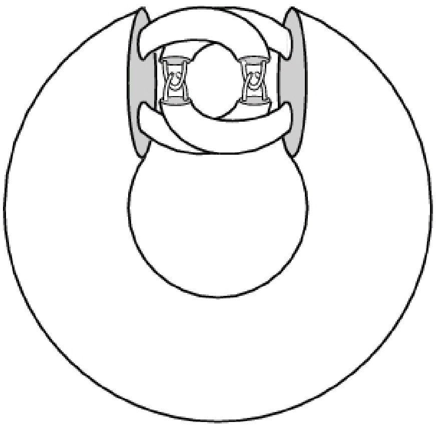


그림 : Alexander horned sphere [1]

[1]It is homeomorphic with the ball D^3, and its boundary is therefore a sphere. It is therefore an example of a wild embedding in $\mathbb{R}^3$. The outer complement of the solid is not simply connected, and its fundamental group is not finitely generated. Furthermore, the set of nonlocally flat ("bad") points of Alexander's horned sphere is a Cantor set.
From http://mathworld.wolfram.com/AlexandersHornedSphere.html

정리 8 (Invariance of domain)
Let $U \subset \mathbb{R}^n$*(resp.* S^n*) be an open set. If* $f : U \to \mathbb{R}^n$*(resp.* S^n*) is one-to-one continuous, then* $f(U)$ *is open in* $\mathbb{R}^n$*(resp.* S^n*) and hence* f *is an embedding. (since* f *is an open map.)*

증명 S^n에 대해서만 보이면 충분하다.
임의의 $y = f(x) \in f(U)$에 대하여 $x \in B_\epsilon \subset \overline{B_\epsilon} \subset U$인 open ball B_ϵ를 잡자. $S_\epsilon = \partial B_\epsilon$, $s^{n-1} = f(S_\epsilon)$라 두면, 앞의 정리에 의하여 $S^n - s^{n-1}$은 2개의 connected component O_1과 O_2를 갖는다. 이 y를 포함하는 component를 O_1이라 두고 $f(B_\epsilon) = O_1$임을 보이면 증명이 끝난다.
$f(B_\epsilon) \subset O_1$: $f(B_\epsilon)$는 connected이므로 자명하다.
$f(B_\epsilon) = O_1$: $f(\overline{B}_\epsilon)$는 n-cell이므로 $S^n - f(\overline{B}_\epsilon)$는 connected이다. 그런데,

$$S^n - f(\overline{B}_\epsilon) = S^n - f(B_\epsilon) - f(S_\epsilon) = (O_1 - f(B_\epsilon)) \sqcup O_2 = (O_1 - f(\overline{B}_\epsilon)) \sqcup O_2$$

이고 좌변에서 connected해야 하므로, $O_1 - f(\overline{B}_\epsilon) = \phi$가 되어 $f(B_\epsilon) = O_1$이 된다. □