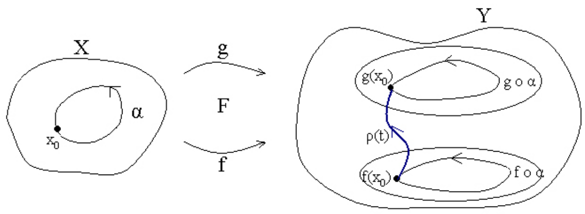
Homotopy invariance(general version)

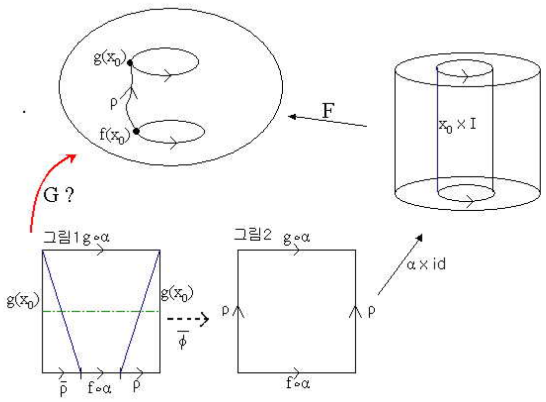
정리 1 *If $f \simeq g : X \to Y$, then the following diagram*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[dr, "g_\sharp"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "\phi_\rho"] \\ & \pi_1(Y,g(x_0)) \end{tikzcd} \qquad \textit{commutes,}$$

where $\rho(t) := F(x_0,t)$ and F is a homotopy between f and g.



증명 $\phi_\rho \circ f_\sharp = g_\sharp$ 임을 보이자.
즉, $\rho^{-1} * (f \circ \alpha) * \rho \ \sim \ g \circ \alpha$ 를 주는 homotopy 를 찾으면 된다.



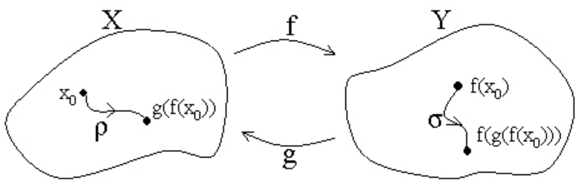
왼쪽 그림에서 원하는 boundary condition 을 만족하는 homotopy G 만 찾으면 되므로 먼저 그림 1의 boundary를 그림 2의 boundary에 맞게 shrink시키는 boundary사이의 map을 $I \times I$로 extend시키면 된다. 즉 원하는 homotopy의 존재성은 일반적으로 map $\phi : \partial D^2 \to \partial D^2$ 를 $\overline{\phi} : D^2 \to D^2$로 extend시킬 수 있다는 사실로부터 증명된다. (예를 들어 radial extension이 있다.) 따라서

$I \times I \xrightarrow{\alpha \times id} X \times I \xrightarrow{F} Y$ 에 대해 $F \circ (\alpha \times id) \circ \overline{\phi}$ 가 원하는 homotopy를 준다.

$\square$

정리 2 *X, Y are path connected. $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.*
More precisely, if $f : X \to Y$ is a homotopy equivalence, then
$f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ is an isomorphism.

증명 Let g be a homotopy inverse of f : X → Y , i.e., $g \circ f \simeq id_X$ *and* $f \circ g \simeq id_Y$.



$id_X \simeq g \circ f$ 사이의 homotopy 동안의 x_0의 path를 ρ 라 두자.
그러면 앞의 정리에 의해 다음 diagram,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(g \circ f)_\sharp} & \pi_1(X, (g \circ f)(x_0)) \\ & id_\sharp \searrow & \uparrow \phi_\rho \\ & & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

이 commute하므로 $\phi_\rho \circ id_\sharp = (g \circ f)_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$. 따라서 $\phi_\rho = g_\sharp \circ f_\sharp$ 이고 ϕ_ρ는 isomorphism 즉 onto 이므로 $g_\sharp : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$ 역시 onto 이다. (여기서 $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$.)
이번에는 $g \circ f$ 대신에 $f \circ g$ 에 대하여 마찬가지로 하면 $\phi_\sigma = f_\sharp \circ g_\sharp$ 역시 isomorphism 즉 1-1 이므로 $g_\sharp : \pi_1(Y, f(x_0) \to \pi_1(X, (g \circ f)(x_0))$은 1-1이 된다. (여기서의 $f_\sharp$은 $f_\sharp : \pi_1(X, g \circ f(x_0)) \to \pi_1(Y, f(g \circ f(x_0)))$이 되어 위 문단의 $f_\sharp$과는 다르다.) 따라서 $g_\sharp$ 은 isomorphism이 된다. 따라서 위 문단에서의 $f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 은 isomorphism 이 된다.

$\square$