# II.4 Examples

### 1. Projective spaces

(i) Construction

$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim, \quad x \sim \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{R}_* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$[x]$ = equivalence class of $x$ = the line passing through $x$,
or equivalently $S^n/\sim, x \sim -x, \ \forall x \in S^n$ [1]
Similarly , $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim, \quad x \sim \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{C}_*$,
$(\mathbb{H}P^n = \mathbb{H}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim, \quad x \sim \lambda x, \ \lambda \in \mathbb{H}^*)$
or equivalently $S^{2n+1}/\sim (S^{4n+3}/\sim), \quad x \sim \lambda x, \ |\lambda| = 1, \ \lambda \in \mathbb{C}.(\mathbb{H})$

Note. $S^0 \longrightarrow S^n \downarrow \mathbb{R}P^n$ , $S^1 \to S^{2n+1} \downarrow \mathbb{C}P^n$ , $S^3 \to S^{4n+3} \downarrow \mathbb{H}P^n$ : Hopf fibration

Note. (1)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{R}^1\backslash 0 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}^2\backslash 0 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}^3\backslash 0 & \xrightarrow{\subset} & \cdots & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}^n\backslash 0 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0 & \xrightarrow{\subset} & \cdots \xrightarrow{\subset} \mathbb{R}^\infty\backslash 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{R}P^0 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}P^1 & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}P^2 & \xrightarrow{\subset} & \cdots & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}P^{n-1} & \xrightarrow{\subset} & \mathbb{R}P^n & \xrightarrow{\subset} & \cdots \xrightarrow{\subset} \mathbb{R}P^\infty
\end{array}$$

Also for $\mathbb{C}$ and $\mathbb{H}$.

(2) $\mathbb{R}P^n$ can be attached as an adjunction space with $(X, A) = (E^n_+, S^{n-1})$ and $Y = \mathbb{R}P^{n-1}$ and $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$, the antipodal identification. (=Hopf map)

Same thing holds for $\mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{H}P^n$ with the Hopf map as an attaching map.
(Use $2n-$disk defined by $\{z \in \mathbb{C}^{n+1} || z| = 1, z_{n+1} \geq 0\}$)
$4n-$ $\mathbb{H}^{n+1}$
Note that $\mathbb{R}P^n\backslash\mathbb{R}P^{n-1}$ = open $n$-cell.
$\mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^{n-1}$ = open $2n$-cell.
$\mathbb{H}P^n\backslash\mathbb{H}P^{n-1}$ = open $4n$-cell.

---

[1]

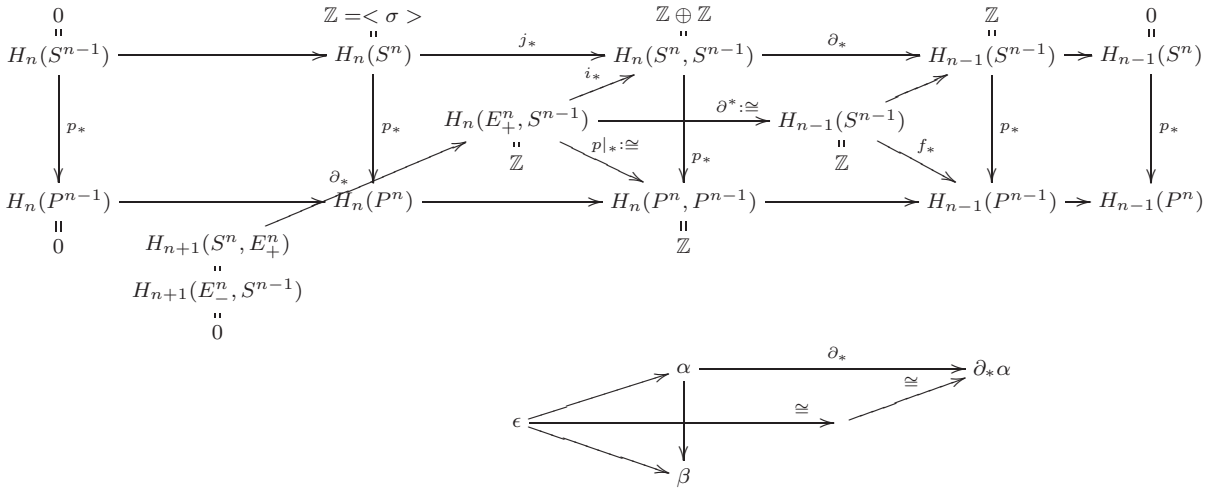
$$\begin{array}{ccc}
S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \\
\downarrow q & \searrow & \downarrow p \\
S^n/\sim & \dashrightarrow & \mathbb{R}P^n
\end{array}$$

continuous, 1-1, onto and compact $\Rightarrow \cong$

$\therefore \mathbb{R}P^n$ is a CW-complex with one $k$-cell in each $k = 1, 2 \cdots n$.
$\mathbb{C}P^n$ is a CW-complex with one $2k$-cell in each $k = 1, 2 \cdots n$.
$\mathbb{H}P^n$ is a CW-complex with one $4k$-cell in each $k = 1, 2 \cdots n$.

(ii) Homology of $\mathbb{R}P^n$

Consider




$\partial_*\alpha =$ generator of $H_{n-1}(S^{n-1}) \Rightarrow \alpha$ is primitive and $H_n(S^n, S^{n-1}) =< j_*\sigma, \alpha >$

Now consider $\gamma = \alpha + (-1)^{n+1} a_*\alpha$, where $a : S^n \to S^n$ antipodal map
$\Rightarrow \partial_*(\alpha + (-1)^{n+1} a_*\alpha) = \partial_*\alpha + (-1)^{n+1}\partial_* a_*\alpha$
$\|$(by functorial property of $\partial_*$)
$(-1)^{n+1} a_*\partial_*\alpha = (-1)^{n+1}(-1)^n \partial_*\alpha$
$= 0$
$\Rightarrow \gamma = j_*(k\sigma) = k j_*(\sigma)$

Claim. $\gamma$ is primitive.
$\Rightarrow k = \pm 1$ and may assume $k = 1$ by taking $-\sigma$ as a generator of $H_n(S^n)$ if necessary.
$\Rightarrow \gamma = j_*(\sigma)$

**증명**(Proof of Claim)

$$\begin{array}{ccc} & & H_n(E^n_+, S^{n-1}) \\ & \swarrow & \downarrow i_*:\cong\text{excision} \\ H_n(S^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, E^n_-) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \swarrow & \epsilon \\ & & \downarrow \\ \alpha & \longrightarrow & i_*\epsilon \end{array}$$

Note. $j_*(a_*\alpha) = 0^2 \Rightarrow j_*(\gamma) = j_*\alpha = i_*\epsilon$ : primitive $\Rightarrow \gamma$ : primitive □

Key Observation. $p \cdot a = p$

$$\begin{array}{ccccc} S^n & 0 \to H_n(S^n) & \to H_n(S^n, S^{n-1}) & \sigma \overset{j_*}{\longmapsto} \gamma & \gamma = \alpha + (-1)^{n+1} a_*\alpha \\ \downarrow p & \downarrow p_* & \downarrow p_* & \downarrow \quad \downarrow & \\ P^n & 0 \to H_n(P^n) & \to H_n(P^n, P^{n-1}) & p_*\sigma \mapsto (1 + (-1)^{n+1}) p_*\alpha & (p_*\alpha = \beta) \end{array}$$

Claim.

$$p_* : \qquad \begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(P^n) \\ \| & & \| \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} \end{array} \qquad \text{if } n \text{ is odd.}$$

$$H_n(P^n) = 0 \quad \text{and} \quad p_* = 0 \quad \text{if } n \text{ is even.}$$

**증명** Use induction on $n$.
$n$= odd : (n-1 :even)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & & & \\ & & \| & & \| & & & & \\ 0 \to & H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & \\ & \downarrow & \sigma \longmapsto \gamma & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & \downarrow \quad \downarrow & & & & & & \\ & & p_*\sigma \mapsto 2\beta & & & & & & \\ 0 \to & H_n(P^n) & \longrightarrow & H_n(P^n, P^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(P^{n-1}) & \to & H_{n-1}(P^n) & \to 0 \\ & \| & & \| & & \| \text{induction hypothesis} & & \| & \\ & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & \end{array}$$

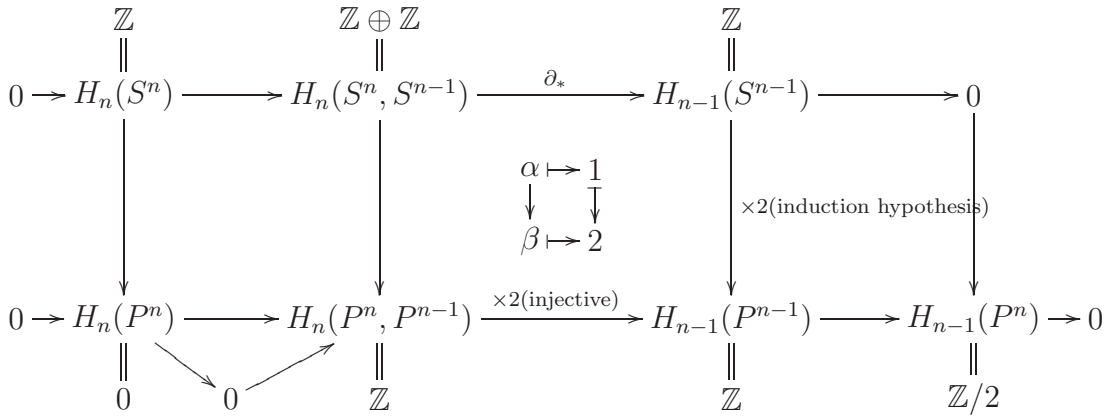
---

[2]

$$\begin{array}{ccccccccc} & & H_n(E^n_+, S^{n-1}) & \to & H_n(S^n, S^{n-1}) & & & \epsilon \longmapsto \alpha & \\ & & \downarrow a_* & & \downarrow a_* & & & \downarrow \quad \downarrow & \\ \text{l.e.s} : \to & H_n(E^n_-, S^{n-1}) & \to & H_n(S^n, S^{n-1}) & \to & H_n(S^n, E^n_-) & \to \cdots & a_*\epsilon \to a_*\alpha & \xrightarrow{j_*} 0 \end{array}$$

$\Rightarrow p_* : \mathbb{Z} \overset{\times 2}{\to} \mathbb{Z}$

$n =$ even : (n-1:odd)

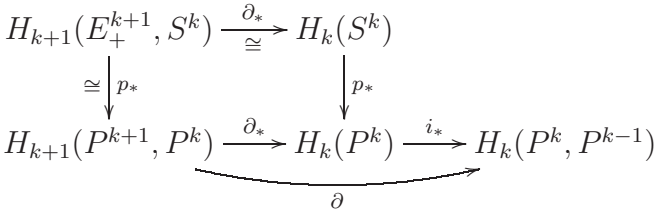



Conclusion. $\left( \begin{array}{ccc} H_n(P^n) = & \left( \begin{array}{cc} \mathbb{Z}, & n = odd \\ 0, & n = even \end{array} \right) & \\ H_{n-1}(P^n) = & \left( \begin{array}{cc} 0, & n = odd \\ \mathbb{Z}/2, & n = even \end{array} \right) & \\ H_q(P^n) \cong & H_q(P^{n-1}) & if\ q \leq n-2 \end{array} \right)$ □

**Cellular chain complex for $P^n$**
(1) $\mathbb{R}P^n$

$\partial : H_{k+1}(P^{k+1}, P^k) \to H_k(P^k, P^{k-1})$, $(k = 1, 2, \cdots)$ is $\left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{if } k \text{ is even} \\ \times 2, & \text{if } k \text{ is odd} \end{array} \right.$.

**증명**




Attaching space의 isomorphism[3]에서 왼쪽의 $p_*$는 isomorphism이다. 먼저 $k$가 even이면 $H_k(P^k) = 0$이므로 $\partial$는 0-map이다. 또한 $k$가 odd이면 $p_* : H_k(S^k) \to H_k(P^k)$는 $\times 2$-map이고 다음 diagram에서 $i_*$가 isomorphism이다.

$$0 = H_k(P^{k-1}) \longrightarrow H_k(P^k) \xrightarrow{i_*} H_k(P^k, P^{k-1}) \longrightarrow H_{k-1}(P^{k-1}) = 0$$

[3]recall $H_q(X, A) \cong H_q(X \cup_f Y, Y)$

따라서, $\partial$는 $\times 2$-map이다. □

$C_k = H_k(P^k, P^{k-1})$로 두면 $H_i(P^n) = H_i(C)$이므로, 위 사실로부터 $H_i(P^n)$를 구해보면 다음을 얻는다.

$$H_i(\mathbb{R}P^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0 < i = \text{odd} < 2n+1 \\ \mathbb{Z} & i = 0, 2n+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{R}P^{2n}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 0 < i = \text{odd} < 2n \\ \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

특히 $\mathbb{R}P^\infty$의 경우에는 다음과 같다.

$$H_i(\mathbb{R}P^\infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & i = \text{odd} \\ \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) $\mathbb{C}P^n$ and $\mathbb{H}P^n$
Recall $\mathbb{C}P^n$(or $\mathbb{H}P^n$) is a CW-complex with one cell in each dimension $2j$(or $4j$), $j = 0, 1, \cdots, n$.
So, $C_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 2j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ and $C_k(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 4j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

따라서 $H_k$를 구해보면 다음을 얻는다.

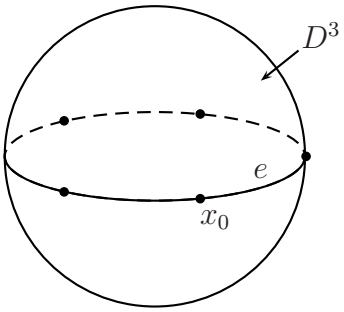
$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 2j, j = 0, \cdots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_k(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 4j, j = 0, \cdots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

또한 $H_k(\mathbb{C}P^\infty)$와 $H_k(\mathbb{H}P^\infty)$의 경우도 위와 마찬가지로 구할 수 있다.

## 2. Lens space revisited

**Second description** of Lens space $L(p,q), p \geq 1 (p, q$: relatively prime).




Lens space는 왼쪽 그림과 같은 $D^3$에서 $\partial D^3 = S^2$의 점들을 다음과 같이 identify하여 얻어진다. $(z,t) \in E^2_+ \subset S^2 \subset \partial D^3$에 대하여

$$(z,t) \sim (e^{\frac{2\pi iq}{p}} z, -t)$$

즉, 북반구의 점들을 $q/p$바퀴 회전하여 대칭되는 남반구의 점들과 identify하고 적도의 점들은 $p$등분하여 모두 identify한 것이다.

특별히 $q = 1$, $p = 2$의 경우에는 $\mathbb{R}P^n$이 얻어짐을 알 수 있다.

Lens space를 이와 같이 정의하면 이는 manifold가 된다. 내부의 점에서는 locally Euclidean이 되는 ball neighborhood를 잡을 수 있고 적도를 제외한 표면의 점에서는 위쪽과 아래쪽에서 2개, 적도위의 점에서는 $p$개의 ball neighborhood의 조각이 생기는데 각각의 identificaion에 의해 붙여주면 locally Euclidean이 됨을 알 수 있다.

$L(p,q)$의 cell-structure :
one 3-cell coming from $D^3$
one 2-cell coming from $E^2_+ \subset \partial D^3$
one 1-cell coming from $e$
one 0-cell coming from $x_0$

따라서 $C_k = \mathbb{Z}$이고 다음의 sequence를 얻는다.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_3 & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times p} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

이 때 boundary map은 실제로 boundary를 계산하면 되므로 위와 같이 주어진다. 여기서 $\partial_2 = \times p$이므로 $im\partial_3 \subset ker\partial_2 = 0$에서 $\partial_3 = 0$이 된다. 따라서 homology를 계산하면

$$H_3 = \mathbb{Z},\ H_2 = 0,\ H_1 = \mathbb{Z}/p,\ H_0 = \mathbb{Z}$$

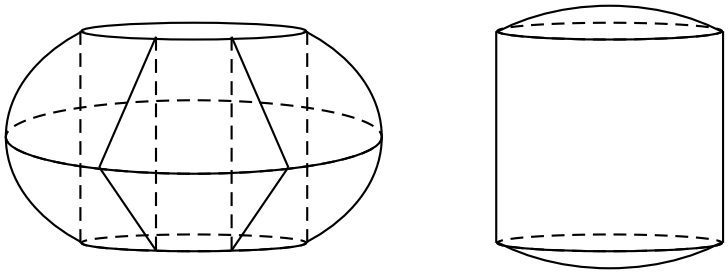
를 얻는다.

**Third description**
$S^3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$
free $\mathbb{Z}/p$-action on $S^3$: $e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot (z_1, z_2) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi iq}{p}} z_2)$ ⇒covering action
Define

$$S^3/(\mathbb{Z}/p) = L(p, q)$$

이 정의는 앞의 second description과 일치한다. $S^3$에서 먼저 $z_1$ 방향으로는 $1/p$바퀴 회전하여 identify했으므로 $z_1$방향으로 $1/p$만큼만 보면 lune 모양의 fundamental domain이 나오고 이것을 $D^3$로 생각할 수 있다. 또한 $z_2$방향으로 $q/p$바퀴, $z_1$방향으로 $1/p$바퀴 회전하여 identify한 것이므로 $D^3$에서 생각하면 앞의 second identification과 일치함을 알 수 있다.

이제 second description과 앞절에서의 Lens space의 정의와 일치함을 알아보자.



Second description에서 $D^3$를 위의 그림과 같이 두 부분의 합집합으로 생각해 보자. 왼쪽의 도형에서 그림과 같이 $p$등분하여 겉면에 주어진 identification에 따라 붙이면 solid torus가 된다. 또한 오른쪽에서는 윗면과 아랫면을 $q/p$바퀴 회전한 후 identify하여야 하므로 역시 solid torus가 된다.
따라서 두 개의 solid torus가 얻어지는데 각각의 겉면은 원래 같은 것을 분리한 것이므로 identify하여야 한다. 따라서 다음의 숙제를 하고 나면 두 description이 일치함을 확인할 수 있다.

**숙제 10.** 위에서 얻어진 두 solid torus의 겉면에 주어진 identification은 $m$(왼쪽)을 $qm + pl$(오른쪽)에 대응시킴을 확인하라.