Fundamental theorem of ordinary differential equation.

정리 1 *(Fundamental theorem of o.d.e.)*
$W \subseteq \mathbb{R}^n$: *open*, $f : W \to \mathbb{R}^n$: *"locally Lipschitz".*
Given a system of o.d.e with initial condition

$$(*) \begin{cases} x' = & f(x) \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

$\exists a > 0$ *and a solution* $x : (-a, a) \to W$ *of (*). If* x, y *are solutions of (*), defined on* $I (=$ *open interval) containing 0 then* $x \equiv y$ *on* I.

정의 1 *(Lipschitz condition)* $f : W \to \mathbb{R}^n$ *is* **Lipschitz** *on* W *if* $\exists K > 0$ *such that* $|f(y) - f(x)| \leq K|y - x| \ \forall x, y \in W$. *Here* K *is called a Lipschitz constant.* $f : W \to \mathbb{R}^n$ *is locally Lipschitz on* W *if each* $x \in W$ *has a neighborhood on which* f *is Lipschitz.*

Note. $f : W \to \mathbb{R}^n, \mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ is locally Lipschitz.

(증명) Let $\phi(t) = f(x + t(y - x))$. Then $f(y) - f(x) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)dt$.
$\therefore f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x)dt$.
$|Df(x + t(y - x))||y - x| \leq K|y - x|$ where $K = max||Df||$ on the neighborhood considered. $\therefore |f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$.

(proof of the fundamental theorem)
Key observation $(*) \Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$.
f is Lipschitz on $B = \{x \in W \mid |x - x_0| \leq b\} \subset W$ with Lipschitz constant K and let $|f(x)| \leq M$ on $\overline{B}$.
Choose $a > 0$ such that $a < min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$ and let $J = [-a, a]$. Construct approximation solution $u_0, u_1, \cdots$, as follows :

$$u_0(t) = x_0, u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s))ds, \ t \in J.$$

(1) $u_k(t) \in B$ *: use induction.*
$|u_{k+1}(t) - x_0| \leq \int_0^t |f(u_k(s))|ds \leq \int_0^t Mds = Mt < Ma < b$.

(2) $\exists L \geq 0$ *such that* $|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq (Ka)^k \ L, \ \forall k$:
$|t| < a$인 모든 t에 대해 $L = max|u_1(t) - u_0(t)|$ 로 두자. Lipschitz 조건과 induction을 쓰면

$$
\begin{aligned}
|u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\le \textstyle\int_0^t |f(u_k(s)) - f(u_{k-1}(s))| ds \\
&\le \textstyle\int_0^t K|u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \\
&\le K(Ka)^{k-1} La = (Ka)^k L.
\end{aligned}
$$

(3) $\{u_k\}$ *is a Cauchy sequence (with respect to uniform norm)* :

For $r, s > N$, $|u_r(t) - u_s(t)| \le \displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \le \sum_{k=N}^{\infty} (Ka)^k L$

a의 정의에 의해 $Ka < 1$ 이고 따라서 $N \to \infty$이면 위 식은 0로 간다. 따라서 u_k는 uniform limit u를 가지고 이것이 바로 우리가 찾던 해이다. 즉,
$u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s))ds$ 에서 양변에 $\lim\limits_{k\to\infty}$ 를 취하면

$$
\begin{aligned}
u(t) &= x_0 + \lim_{k\to\infty} \textstyle\int_o^t f(u(s))ds \\
&= x_0 + \textstyle\int_0^t \lim\limits_{k\to\infty} f(u_k(s))ds \qquad \textit{by Lebesgue's dominated convergence theorem} \\
&= x_0 + \textstyle\int_0^t f(u(s))ds \qquad \textit{by Lipschitz condition}
\end{aligned}
$$

따라서 u는 적분방정식, 따라서 미분방정식을 만족하고 f가 연속이므로 u는 $\mathcal{C}^1$이다.

(4) *Uniqueness* :

먼저 작은 근방에서는 $x \equiv y$가 되게 할 수 있음을 보이자.

$\exists \epsilon > 0$ *such that* $x \equiv y$ *on* $(-\epsilon, \epsilon)$:

Choose $\epsilon > 0$ such that $x(J), y(J) \in B,\ J = [-\epsilon, \epsilon] \subseteq [-a, a]$ and $\epsilon < \frac{1}{K}$.

Let $Q = \max\limits_J |x(t) - y(t)|$ (J:compact and x, y:continuous$\Rightarrow \exists\ max$.)

$$
\begin{aligned}
&= |x(t_1) - y(t_1)| \text{ for some } t_1 \in J. \\
&= |\textstyle\int_0^{t_1} x'(s) - y'(s) ds| \\
&\le \textstyle\int_0^{t_1} |x'(s) - y'(s)| ds \\
&\le \textstyle\int_0^{t_1} |f(x(s)) - f(y(s))| ds \\
&\le K \textstyle\int_0^{t_1} |x(s) - y(s)| ds \\
&\le KQ\epsilon < Q \qquad : \qquad \textit{contradiction unless } Q = 0.
\end{aligned}
$$

따라서 $Q = 0$ 이 되는 ϵ을 잡았고 ϵ근방에서는 $x \equiv y$이다.

이제 global하게도 $x \equiv y$를 만족함을 보이기 위해 $A = \{t \in I \,|\, x(t) = y(t)\}$를 생각하자. I가 connected임을 이용해서 $A \subset I$가 open이고 closed임을 보이면 $A = I$이다. ($A \neq \emptyset$이므로)

먼저 $A = \{t \in I \,|\, x(t) = y(t)\}$꼴이므로 Hausdorff 조건에서 이는 당연히 closed이다. A가 open임을 보이기 위해 $t_0 \in A$ 를 가정하자. 즉 $x(t_0) = y(t_0) = p$. 그리고 x, y는 다음 $(*)$의 해가 된다.

$$(*)\begin{cases} x' = & f(x) \\ x(t_0) = & p \end{cases}$$

Note. $x(t)$가 $(*)$의 해이면 $\widetilde{x}(t) = x(t+t_0)$ 역시 $(*)$의 해가 되고 이 때 initial condition은 $\widetilde{x}(0) = x(t_0) = p$이다.
$(\because)\widetilde{x}' = x'(t+t_0) = f(x(t+t_0)) = f(\widetilde{x}(t))$.

이제 $\widetilde{x}(t) = x(t+t_0), \widetilde{y}(t) = y(t+t_0)$ 라 두면, 이들은 둘 다 $(*)$의 해가 되면서 같은 initial condition $(t,x) = (0,p)$를 가진다. *uniqueness* 증명의 앞부분에서 0근방에서는 $\widetilde{x} \equiv \widetilde{y}$가 되게 할 수 있다고 했으므로 $\exists \epsilon > 0$ such that $\widetilde{x} \equiv \widetilde{y}$ on $(-\epsilon, \epsilon)$. 따라서 $x(t) \equiv y(t)$ on $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$이다. 즉 A에 들어가는 t_0의 근방을 잡았으므로 A는 open이다. $\square$

Unique maximal integral curve on M.

정리 2 *Let X be $\mathcal{C}^\infty$ vector field on Hausdorff M. $\forall p \in M, \exists!$ maximal integral curve $\sigma = \sigma_p$ with $\sigma(0) = p$. i.e., $\exists$ open interval $(a(p), b(p)) \subset \mathbb{R}$ and*
$\sigma : (a(p), b(p)) \to M$ such that
(1) $0 \in (a(p), b(p))$ and $\sigma(0) = p$.
(2) σ is an integral curve.
(3) If $\gamma : (c,d) \to M$ is a smooth curve with (1) and (2), then $\gamma = \sigma|_{(c,d)}$.

증명 Fundamental theorem으로부터 unique local existence 는 얻었고, 다음의 $\mathcal{I}$를 생각하자.
$\mathcal{I} = \{I = (a,b) \,|\, \exists \sigma : (a,b) \to M \,:\, integal\ curve,\ \sigma(0) = p\}$.
만일 두 개의 curve $\sigma : I \to M, \tau : J \to M$가 (1),(2)를 만족한다면, uniqueness에 의해 $I \cap J$에서는 $\sigma \equiv \tau$여야 한다. 즉 겹치는 곳에서는 항상 같으므로 잘 붙여나갈 수 있다. 이제 $(a(p), b(p)) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ 라 두고 σ를 "union" of integral curves라 두면 된다.

$\square$