Topology of Manifold and Partition of Unity

정리 1 Let M be a connected Hausdorff $\mathcal{C}^\infty$-manifold, then the followings are equivalent.
(1) M is paracompact.
(2) $\forall \mathcal{U}$, an open covering of M, $\exists$ a partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$,
i.e., $\exists f_\alpha \ : \ M \to [0,1], \mathcal{C}^\infty, \forall \alpha \in A$, such that
a) $\{suppf_\alpha \mid \alpha \in A\}$ forms a locally finite closed refinement of $\mathcal{U}$
b) $\sum\limits_\alpha f_\alpha \equiv 1$
(3) M admits a Riemannian metric.
(4) M is metrizable.
(5) M has a compact exhaustion,
i.e., $\exists$ a sequence of open sets $U_1, U_2, \cdots$ such that
$\overline{U_i}$ is compact , $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$, $\forall i$ and $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$.
(6) M is σ-compact, i.e., M is a countable union of compact sets.
(7) M is a countable union of coordinate charts.
(8) M is 2^{nd} countable.

정리를 증명하기에 앞서 정리에 나오는 몇가지 개념들을 소개한다.

정의 1 A topological space X is ***paracompact*** if every open covering of X has a locally finite refinement.

일반적으로, $\mathcal{V}$가 $\mathcal{U}$의 refinement라는 것은 $\mathcal{V} = \{V_\beta\}, \mathcal{U} = \{U_\alpha\}$라고 했을 때, 임의의 β에 대하여 $V_\beta \subset U_\alpha$가 되는 α가 존재한다는 것이고, 여기서 open covering의 refinement는 refinement이면서 동시에 open covering이 되는 것을 말한다. 또한 open covering이 locally finite하다는 것은 임의의 점에 대하여 적당한 open neighborhood가 존재하여 covering의 유한개의 open set들과 만난다는 것이다.

정의 2 A ***Riemannian metric*** g is a $\mathcal{C}^\infty$ tensor field of type (0,2) which is symmetric and positive definite,
i.e., $g(X,Y) = g(Y,X), \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}$,
$g(X,X) \geq 0$,
$g(X,X) = 0$ iff $X = 0$.

정의 3 A topological space X is ***metrizable*** if there exists a metric d on the set X where metric topology is the same as the topology of X.

정리의 증명
((1)⇒(2))
Step 1.(Shrinking lemma)
Given $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, an open cover, construct $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$, locally finite(possibly $V_\alpha = \phi$) such that $V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$.
증명 $\forall p \in M$, $\exists O_p$ s.t. $p \in O_p \subset \overline{O_p} \subset U_\alpha$ for some α.
M이 paracompact하므로, $\mathcal{O} = \{O_p\}$의 locally finite open refinement가 존재하고 이를 $\mathcal{N} = \{N_\beta\}_{\beta \in B}$라고 하자. 즉, 각각의 N_β에 대하여 $N_\beta \subset O_p$를 만족하는 p가 존재한다. 따라서, $N_\beta \subset O_p \subset \overline{O_p} \subset U_\alpha$를 만족하는 α가 존재하고 $\alpha = \varphi(\beta)$라고 하면, 함수 $\varphi : B \to A$ 가 정의된다. (위 성질을 만족하는 α가 여러 개 존재하면 그 중 하나를 선택한다.)
이제, 각각의 $\alpha \in A$에 대하여 $V_\alpha = \bigcup\{N_\beta \mid \varphi(\beta) = \alpha\}$로 정의하면(possibly $V_\alpha = \phi$), $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$는 $\mathcal{U}$의 locally finite open refinement가 된다. 또한, 다음의 Claim에 의하여 $\overline{V_\alpha} = \overline{\bigcup N_\beta} = \bigcup \overline{N_\beta} \subset \bigcup \overline{O_p} \subset U_\alpha$가 성립하므로 $V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$를 만족한다. □

Claim. 1) $\{F_i \mid i \in I\}$, a locally finite collection of closed sets $\Rightarrow \bigcup F_i$ is closed.
2) $\mathcal{N} = \{N_\beta\}$ locally finite $\Rightarrow \overline{\mathcal{N}} = \{\overline{N_\beta}\}$, locally finite.
증명. easy exercise

Step 2.(special case)
Suppose $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, where $\overline{U_\alpha}$ is compact $\forall\alpha$. Then there exists a partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$.
증명 step 1을 두번 적용하여 $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$와 $\mathcal{W} = \{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$를 얻는다. 즉, 각각의 α에 대하여, $W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha \subset \overline{U_\alpha}$.

<ins>Claim</ins> (bump function) $C^{compact} \subset U^{open} \Rightarrow \exists\mathcal{C}^\infty$-function f s.t. $f(C) = 1$ and $f(U^c) = 0$.
증명 $\forall p \in C$, $\exists f_p : \mathcal{C}^\infty$ s.t. $f_p > 0$ on a neighborhood $U_p \subset U$ and 0 on U^c. Choose a finite subcover $\{U_{p_1}, \cdots, U_{p_n}\}$ of C. f_{p_i}는 U_{p_i}에서 positive이므로, compact set C위에서 $f_{p_1} + \cdots + f_{p_n} > \delta$인 양수 δ를 잡을 수 있다. 함수 φ를

$$\varphi : \mathcal{C}^\infty \quad \text{and} \quad \varphi = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{if } x \geq \delta \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{array} \right.$$

라고 하면, $f = \varphi \circ (f_{p_1} + \cdots + f_{p_n})$가 구하고자 하는 함수이다. □

위 Claim에 의하여 $g_\alpha(\overline{W_\alpha}) = 1$ and $g_\alpha({V_\alpha}^c) = 0$인 g_α가 존재하고, $supp\ g_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$이다. 이 때, $\{\overline{V_\alpha} \mid \alpha \in A\}$가 locally finite refinement이므로, $\{supp\ g_\alpha \mid \alpha \in A\}$도 locally finite refinement가 되고, $f_\alpha = \frac{g_\alpha}{\sum g_\alpha}$로 두면 a), b)

조건을 만족하는 partition of unity가 된다. $\square$

Step 3.
$C^{closed} \subset U^{open} \Rightarrow \exists f\ : M \to [0,1], \mathcal{C}^\infty$ s.t. $f(C) = 1$ and $f(U^c) = 0$.
증명 M이 locally compact이므로 임의의 $p \in C$에 대하여 $\overline{V_p}$가 compact이고 $\overline{V_p} \subset U$인 open neighborhood V_p를 잡을 수 있다.
또한, $M - C$의 open cover $\{V_\beta \mid \beta \in B\}$를 $\overline{V_\beta}$가 compact이고 $V_\beta \subset M - C$가 되도록 하나 잡으면, $\{V_p, V_\beta \mid p \in C, \beta \in B\}$는 M의 open cover이고 Step 2의 가정을 만족시킨다. 따라서 partition of unity $\{f_p, f_\beta\}_{p\in C,\beta\in B}$ subordinate to $\{V_p, V_\beta\}$가 존재한다.
이제, $f = \sum_{p\in C} f_p$로 두면, $f(C) = 1$ and $f(U^c) = 0$을 만족한다. $\square$

Step 4.(general case)
Step 2의 증명에서 Claim 대신 Step 3를 사용하면 같은 방법으로 증명된다.

((2)⇒(3))
M을 cover하는 coordinate chart를 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$라고 두고, 각각의 U_α에 coordinate vector field $\frac{\partial}{\partial x_i}$가 orthonormal하도록 local Riemannian metric g_α를 주자. 즉,

$$g_\alpha(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}.$$

$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$를 partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$라고 하고, $p \in M$에서 g를

$$g(X, Y) = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(p) g_\alpha(X, Y), \quad X, Y \in T_pM$$

로 정의하면, g는 M의 Riemannian metric이 된다.
이를 확인하기 위하여, 먼저 g가 smooth, symmetric, bilinear가 됨은 자명하다. $g_\alpha(X, X) \geq 0$와 $f_\alpha \geq 0$에서 $g(X, X) \geq 0$임을 알 수 있다. 또한, $g(X, X) = 0$이면 $f_\alpha(p) > 0$인 α가 존재하므로 $g_\alpha(X, X) = 0$가 되어 $X = 0$이 된다. 따라서, g는 Riemannian metric이다.

(참고) (3)의 성질을 만족하는 manifold를 Riemannian manifold라고 부른다.

((3)⇒(4))
Piecewise $\mathcal{C}^1$ curve σ의 길이를 다음과 같이 정의하자.

$$l(\sigma) = \int_a^b |\frac{d\sigma}{dt}| dt, \qquad where\ |\frac{d\sigma}{dt}| = \sqrt{g(\frac{d\sigma}{dt}, \frac{d\sigma}{dt})}$$

이제, M의 metric d를 다음과 같이 정의한다.

$$d(x,y) := \inf\{l(\sigma) \mid \textit{all possible piecewise } \mathcal{C}^1 \textit{ curve } \sigma \textit{ from } x \textit{ to } y\}$$

이때, d가 $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = d(y,x)$, $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$를 만족하는 것은 자명하고, (4)를 보이기 위해서는 $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$와 d에 의하여 induce된 topology가 원래 topology와 같음을 보이면 된다.

(a) locally, on a compact coordinate ball,
$\exists c,\ C > 0$ s.t. $c\|X\| \leq |X| \leq C\|X\|$, $\forall X = a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}$,
where $|X| = \sqrt{g(X,X)}$ and $\|X\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.
증명 $\mathcal{X}$의 orthonormal basis를 $\{e_i\}$라고 하고, $\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum a_{ij}e_i$로 두자. 또한, $G = (g_{ij})$ where $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ 라고 하면, $G = A^tA$가 성립한다.
따라서,

$$|X|^2 = g(X,X) = \sum_{i,j} g_{ij}a_ia_j = X^tGX = X^tA^tAX = (AX)^t(AX)$$
$$= \|AX\|^2 \leq \|A\|^2\|X\|^2 \leq C\|X\|^2 \text{ for some } C$$

이다.
또한, $|\ |$과 $\|\ \|$의 역할을 바꾸면 다른 쪽의 부등식을 얻는다. □

(b) 임의의 compact ball에서 (a)에 의하여 $cl_E(\sigma) \leq l(\sigma) \leq Cl_E(\sigma)$ 가 성립한다. (l_E는 Euclidean metric에 의한 길이)
따라서, 임의의 $x, y \in M$에 대하여 $c\|x-y\| \leq d(x,y) \leq C\|x-y\|$가 성립하고, 이 부등식에 의해, $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$와 d-topology=manifold topology임을 알 수 있다.

((4)⇒(5))
$\forall p \in M$, let $r(p) = \frac{1}{2}\sup\{r \mid \overline{B_r(p)} \textit{ is compact.}\}$.
M이 locally compact이므로, $r(p) > 0$이고, 어떤 p에 대하여 $r(p) = \infty$이면 당연히 (5)가 성립하므로, $0 < r(p) < \infty$라고 하자.

Claim 1. $r : M \to \mathbb{R}$ is continuous.
증명 $\overline{B_r(x_1)} \subset \overline{B_{r+d}(x_2)}$, $d = d(x_1,x_2)$ (by triangular inequality), $\forall r$
$\Rightarrow \overline{B_{r-d}(x_1)} \subset \overline{B_r(x_2)}$, $\forall r$
$\Rightarrow r(x_1) \geq r(x_2) - \frac{1}{2}d$
x_1과 x_2의 역할을 바꾸면, $r(x_2) \geq r(x_1) - \frac{1}{2}d$. 따라서, $|r(x_1) - r(x_2)| \leq \frac{1}{2}d(x_1,x_2)$를 얻고, r이 연속임을 안다. □

Claim 2. $A \subset M$, A compact $\Rightarrow \widetilde{A} = \bigcup_{a \in A} \overline{B_{r(a)}(a)}$ is compact.

증명 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$를 $\widetilde{A}$의 임의의 sequence라고 하자.
각각의 z_i에 대하여 $z_i \in \overline{B_{r(y_i)}(y_i)}$인 $y_i \in A$가 존재하고, $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$는 A의 sequence이고, A가 compact set이므로, A에서 수렴하는 subsequence를 갖는다. 이 subsequence를 $\{y_j\}$, $y_j \to y$라고 하고, 이에 대응되는 $\{z_i\}$의 subsequence를 $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$라고 하자.(아직 z_j의 수렴성은 증명하지 않았다.)
$\overline{B} := \overline{B_{\frac{3}{2}r(y)}(y)}$라고 정의하면, r이 연속이므로, 충분히 큰 j에 대하여 $\overline{B_{r(y_j)}(y_j)} \subset \overline{B}$가 성립한다.
이제, $z_j \in \overline{B_{r(y_j)}(y_j)} \subset \overline{B}$인 z_j를 선택하면, 이는 $\overline{B}$에 속하는 $\{z_j\}$의 subsequence이고, $\overline{B}$가 compact이므로, $\overline{B}$에서 수렴하는 subsequence을 갖는다. 이 subsequence를 $\{z_k\}$, $z_k \to z$라고 하자.
이제 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$에 대하여 $\overline{B}_\epsilon := \overline{B_{(1+\epsilon)r(y)}(y)}$라고 정의하면, 마찬가지로 $\{z_k\}$는 $\overline{B}_\epsilon$에서 수렴하는 subsequence를 갖고, 따라서 $z \in \overline{B}_\epsilon$이다.
결국 $z \in \displaystyle\bigcap_{0<\epsilon<\frac{1}{2}} \overline{B}_\epsilon = \overline{B_{r(y)}(y)} \subset \widetilde{A}$ 이고, 따라서 $\widetilde{A}$는 compact set이다.
(M이 metrizable이므로 sequentially compact와 compact가 동치이다.) □

이제, $A_1 = \{x_0\}$, $A_{n+1} = \widetilde{A_n}$이라고 하고, $M = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$임을 증명하자.

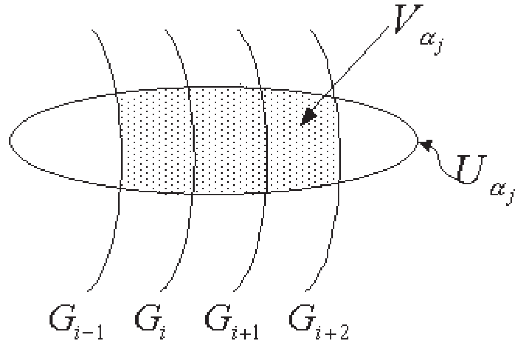
$A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ is open in M :
Let $U_{n+1} := \displaystyle\bigcup_{a \in A_n} B_{r(a)}(a)$. Then U_n is open and $A_n \subset U_{n+1} \subset A_{n+1}$.
$\therefore A = \bigcup U_n$: open.

$A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ is closed in M :
$x \in \overline{A} \Rightarrow \exists y \in A$ s.t. $d(x,y) < \frac{2}{3}r(x)$
$r(y) \geq r(x) - \frac{1}{2}d(x,y) > r(x) - \frac{1}{3}r(x) = \frac{2}{3}r(x) > d(x,y)$
So, $y \in A_n \Rightarrow x \in B_{r(y)}(y) \Rightarrow x \in \widetilde{A_n} = A_{n+1} \subset A$
$\therefore A$: closed.

따라서, $A = M$이고, 결국 A_n이 M의 compact exhaustion이 된다.

((5)⇒(1))
$M = \bigcup \overline{G_i}$, $\overline{G_i}^{compact} \subset {G_{i+1}}^{open}$라 두자.
Let $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ be an open cover of M.
For each i, $\overline{G_{i+1}} - G_i$: compact

$\Rightarrow \exists$ a finite subcover $U^{(i)}_{\alpha_1}, \cdots, U^{(i)}_{\alpha_k}$
$\Rightarrow V^{(i)}_{\alpha_j} = U^{(i)}_{\alpha_j} \cap (G_{i+2} - \overline{G_{i-1}})$: cover of $\overline{G_{i+1}} - G_i$
Then $\mathcal{V}$, the collection of all such $V^{(i)}_{\alpha_j}$, is a locally finite open refinement of $\mathcal{U}$.



((5)⇒(6)) Clear.

((6)⇒(5))
$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, where K_i is compact.
M : locally compact Hausdorff space
$\Rightarrow K_1$ has a neighborhood U_1 with compact $\overline{U_1}$.
$\Rightarrow \overline{U_i} \bigcup K_2$ has a neighborhood U_2 with compact $\overline{U_2}$.
$\vdots$
$\therefore M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ with $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$.

((6)⇒(7))
$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, where K_i is compact.
각각의 K_n은 유한개의 coordinate ball로 덮을 수 있고, 따라서 M 전체를 countable coordinate ball로 덮을 수 있다.

((7)⇒(8))
각각의 coordinate ball이 2^{nd} countable이고, M은 coordinate ball의 countable union이므로 2^{nd} countable이다.

((8)⇒(6))
$\forall p \in M$, take a coordinate neighborhood U_p with compact $\overline{U_p}$.

$\exists V_p$: basic open set s.t. $p \in V_p \subset U_p \Rightarrow \overline{V_p} \subset \overline{U_p}$, and hence $\overline{V_p}$ is compact
Then, $M = \bigcup \overline{V_p}$ and $\{\overline{V_p}\}$ is countably many. $\square$

따름정리 2 Let M be a (***not necessarily connected***) Hausdorff $\mathcal{C}^\infty$-manifold, then the followings are equivalent.
(1) M is paracompact.
(2) $\forall \mathcal{U}$ an open covering of M, $\exists$ a partition of unity subordinate to $\mathcal{U}$.
(3) M admits a Riemannian metric.
(4) M is metrizable.
(5) Each component of M has a compact exhaustion.
(6) Each component of M is σ-compact.
(7) Each component of M is a countable union of coordinate charts.
(8) Each component of M is 2^{nd} countable.

증명
(1)$\Leftrightarrow$Each component of M is paracompact.(Clear by definition, M이 locally connected이므로 각 component는 open이다.)
(2)$\Leftrightarrow$Each component has property (2) (trivial)
(3)$\Leftrightarrow$Each component has property (3) (trivial)
(4)$\Leftrightarrow$Each component has property (4) :
($\Rightarrow$) clear
($\Leftarrow$) M의 각 component를 (M_i, d_i)라고 하고, 새로운 metric $\widetilde{d_i} = \frac{d_i}{1+d_i}$를 정의하면, $\widetilde{d_i}$는 d_i와 같은 topology를 주고, $\widetilde{d_i}(x, y) < 1$이다.
이제, M의 metric d를

$$d(x, y) = \{ \begin{array}{ll} \widetilde{d_i}(x, y), & \text{if } x, y \text{ are in the same component } M_i \\ 1 \quad\quad , & \text{otherwise} \end{array}$$

로 정의하면, d는 manifold topology와 같은 topology를 준다.

각 component에서는 (1) (8)이 동치임을 알고 있으므로 증명끝. $\square$