2. Stokes' theorem.

정리 1 *For* (M^n,μ) , $(\partial M,\partial\mu)$, $i^*:\partial M \hookrightarrow M$ *and* $\omega\in\mathcal{E}_c^{n-1}(M)$,

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega$$

Remark. 여기서 $\int_{\partial M}\omega$는 보다 엄밀하게 말하면 $\int_{\partial M} i^*\omega$이고 $\partial M=\emptyset$이면 0으로 정의한다.

증명 1. (Easy case)
Suppose $supp\,\omega\subset(U,x)$, a positive coordinate chart (single chart). Then ω can be written as $\omega=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f_i dx_1\wedge\cdots\wedge\overset{\wedge}{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$ with $supp\,f_i\subset U$.
Then $d\omega=\displaystyle\sum_i(-1)^{i-1}\sum_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\overset{\wedge}{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$
여기서 $j=i$일 때만 항이 없어지지 않으므로 따라서

$$d\omega=\sum_i\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

$$\begin{aligned}\int_M d\omega&=\int_{\mathbb{H}^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(f_i\circ x^{-1})}{\partial u_i}du_1\cdots du_n\\&=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{u_n,\cdots,u_2}\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{u_1}\frac{\partial(f_i\circ x^{-1})}{\partial u_i}du_1\cdots du_n\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial(f_1\circ x^{-1})}{\partial u_1}du_1du_2\cdots du_n\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}[f_1\circ x^{-1}]_{-\infty}^{0}du_2\cdots du_n\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(f_1\circ x^{-1})(0,u_2,\cdots,u_n)du_2\cdots du_n\\&=\int_{\partial M}i^*\omega\end{aligned}$$

위 식에서 $supp\,f_i$는 U안에 있다는 사실로부터 $-\infty,\infty$에서의 적분값 $(f_2\circ x^{-1})(\pm\infty)=0,(f_1\circ x^{-1})(-\infty)$은 모두 0임을 이용하였다.

2. (General case)
Choose a finite cover $\{U_i\}$ of positive coordinate chart such that $supp\,\omega\subset\bigcup U_i$ and let $\{\rho_i\}$ be a partition of unity subordinate to $\{U_i\}$. Then

$$\int_M d\omega=\int_M\sum_i\rho_i d\omega=\int_M\sum_i d(\rho_i\omega)$$

$$= \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) = \sum_i \int_{\partial M} \rho_i \omega = \int_{\partial M} \sum_i \rho_i \omega = \int_{\partial M} \omega. \qquad \square$$

Remark. $\phi : N \to M$ 에 대해 integral along ϕ를 $\int_\phi \omega = \int_N \phi^* \omega$ 로 정의한다. 또한 $\phi : N^n \to M^n$에 대해 $\phi^{-1}(compact) = compact$일 때 ϕ를 proper라고 한다.
ϕ가 proper일 때 $\partial\phi = \phi \circ i : \partial N \to M$ 이라 두면 $\omega \in \mathcal{E}_c^{n-1}(M)$에 대해
$\displaystyle\int_\phi d\omega = \int_{\partial\phi} \omega$ 이 성립한다.

(증명) $\displaystyle\int_\phi d\omega = \int_N \phi^* d\omega = \int_N d(\phi^* \omega) = \int_{\partial N} i^* \phi^* \omega = \int_{\partial N} (\phi \circ i)^* \omega = \int_{\partial \phi} \omega$