Contractible space and Brouwer fixed point

정의 1 *A space X is contractible to $x_0 \in X$ if*
$id_X \simeq c$, where $c : X \to \{x_0\} \subset X$ is a constant map.

Remark *contractible $\Rightarrow$ path connected.*

예 1. $\mathbf{R}^n$ is contractible.
F(x)=tx 로 주면 이는 id 와 0 간에 homotopy 를 준다.
2. D^n is contractible. 역시 F(x)=tx 로 주면 된다.
3. Any space which is homeomorphic to D^n.
4. A "tree" is contractible.(그림)
5. S^1 is not contractible.

숙제 6. X≅Y and X is contractible $\Rightarrow$ Y is also contractible.
Can you show that S^1 is not contractible.(π_1을 쓰지 않고 직접적으로 보일 수 있나?)

Remark.
1. *X is contractible to $x_0 \in X \Rightarrow X$ is contractible to any other point of X :*
X가 contractible to x_0 이면 path connected 이므로 $\forall\, x_1 \in$ 에 대해 x_0, x_1 사이에 path ρ가 존재한다. F 를 id_X 와 c_{x_0} 간의 homotopy라 할 때 아래와 같이 정의된 H는 id_X와 c_{x_0} 사이에 원하는 homotopy를 준다.

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \rho(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

2. *X is contractible $\Leftrightarrow X \simeq \{point\}$:*
($\Rightarrow$ 증명) $\{x_0\} \underset{i}{\hookrightarrow} X \underset{c_{x_0}}{\to} \{x_0\}$에서
$c_{x_0} \circ i = id_{x_0}$ 이고 X 가 contractible 이므로 $i \circ c_{x_0} \simeq id_X$이다. 따라서 $X \simeq \{x_0\}$ 이다.
($\Leftarrow$ 증명) $X \simeq \{x_0\}$ 이므로 homotopy equivalence f: $X \to \{x_0\}, g : \{x_0\} \to X$ 가 존재한다. 이 때 f는 constant map c_{x_0} 가 되고 따라서 $g \circ f$ 역시 constant map이 된다. 그런데 $g \circ f \simeq id_X$ 이므로 X 는 contractible하다.

정리 1 *X is contrantible $\Rightarrow \pi_1(X) = 0$.*

증명 $X \simeq \{x_0\}$ 이므로 $\pi_1(X) \cong \pi_1(\{point\}) = 0$. $\square$

Fact. $\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z}$.
따라서 S^1 은 contractible하지 않다. $\mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$ 역시 마찬가지이다.

정리 2 *(Brouwer fixed point theorem)*
Let $f : D^2 \to D^2$ be a map. Then f has a fixed point, i.e., $\exists x \in D^2$ such that f(x)=x.

증명 Suppose not. Then $x \neq f(x), \forall x \in D^2$.
Define a function $g : D^2 \to \partial D^2$ as follows :
Let $g(x)$ be the point of intersection of the half line from $f(x)$ to x with ∂D^2.
i.e., $g(x) = f(x) + t(x - f(x))$ where t is the unique solution of $\|f(x) + t(x - f(x))\| = 1$. Then g is continuous and g is id on $\partial D^2 = S^1$ i.e.,
$S^1 \overset{i}{\hookrightarrow} D^2 \overset{g}{\to} S^1$ and $g \circ i = id$ 이므로 대응하는 fundamental group들을 생각해 보면,

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(S^1, 1) & \overset{i_\sharp}{\to} & \pi_1(D^2, 1) & \overset{g_\sharp}{\to} & \pi_1(S^1, 1) \\ \mathbf{Z} & & 0 & & \mathbf{Z} \end{array}$$

이 되고 이는 funtorial property에 의해 모순이다. 즉
$0 = g_\sharp \circ i_\sharp = (g \circ i)_\sharp = id_\sharp = id : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ 이므로 이는 모순이 된다. $\square$