Functorial Property

정리 1 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *induces a homomorphism*
$f_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ *given by* $\{\alpha\} \mapsto \{f \circ \alpha\}$.

증명 먼저 $f_\sharp(\{\alpha\})$ 가 잘 정의되는지 살펴보자. 즉 두 $\alpha \sim \alpha'$ 에 대해 $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ 임을 보이자. α 와 α' 사이의 homotopy F에 대해 f ∘ F는 $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ 사이에 homotopy를 준다. 왜냐하면
$(f \circ F)$(t,0) = f(F(t,0)) = f($\alpha(t)$) = $(f \circ \alpha)(t)$
$(f \circ F)$(t,1) = f(F(t,1)) = f($\alpha'(t)$) = $(f \circ \alpha')(t)$
$(f \circ F)$(0,s) = f(F(0,s)) = f(x_0) = y_0, $\quad \forall s \in I$.
다음으로 $f_\sharp$이 homomorphism임을 보이자.
$f_\sharp(\{\alpha\}\{\beta\}) = f_\sharp(\{\alpha * \beta\}) = \{f \circ (\alpha * \beta)\}$이고

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

이므로 $f \circ (\alpha * \beta)$는 정확히 $(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$가 된다. 따라서
$f_\sharp(\{\alpha\}\{\beta\}) = \{(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)\} = \{f \circ \alpha\}\{f \circ \beta\} = (f_\sharp\{\alpha\})(f_\sharp\{\beta\})$.

□

정리 2 *1.* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$**에 대해**
$(g \circ f)_\sharp = g_\sharp \circ f_\sharp$**이다**.
2. $id_\sharp = id$.

증명
$(g \circ f)_\sharp\{\alpha\} = \{(g \circ f) \circ \alpha\} = \{g \circ (f \circ \alpha)\} = g_\sharp\{f \circ \alpha\} = g_\sharp(f_\sharp\{\alpha\}) = (g_\sharp \circ f_\sharp)\{\alpha\}$.
$id_\sharp\{\alpha\} = \{id \circ \alpha\} = \{\alpha\}$.

□

위와 같은 성질을 *Functorial property* 라고 한다.

Remark. The previous theorem ⇒ If f has an inverse f^{-1} then $(f^{-1})_\sharp = (f_\sharp)^{-1}$.

따름정리 3 $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *is a homeomorphism.*
$\Rightarrow f_\sharp : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$ *is an isomorphism.*