Homotopy Invariance(Preliminary version)

정리 1 *$f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ and $f \simeq g$ relative to x_0.*
$\Rightarrow f_\sharp = g_\sharp$: $\pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$.

증명 F(x,t)를 f 와 g 사이의 homotopy 라 하면, G(x,t)=F($\alpha(x), t$)는 $f \circ \alpha$ 와 $g \circ \alpha$ 사이의 homotopy를 준다. 따라서
$f_\sharp(\{\alpha\}) = \{f \circ \alpha\} = \{g \circ \alpha\} = g_\sharp(\{\alpha\})$. □

따름정리 2 *$f : (X, x_0) \to (Y, y_0), g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ and*
$g \circ f \simeq 1_X$ relative to $x_0, f \circ g \simeq 1_Y$ relative to y_0.
$\Rightarrow f_\sharp = (g_\sharp)^{-1} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ is an isomorphism.

정의 1 *X is homotopy equivalent to Y (or X has the same homotopy type as Y), denoted by $X \simeq Y$,*
if $\exists f : X \to Y$ and $g : Y \to X$ such that $f \circ g \simeq 1_Y$ and $g \circ f \simeq 1_X$.
In this case f is called a homotopy equivalence.

따라서 위 따름정리 2는 π_1 이 homotopy (base point x_0 를 보존하는) equivalent 한 공간들에 대해 같다는 것을 보여준다.
Example. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$.
$f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g = inclusion$ 으로 주면 $f \circ g = 1_Y$ 이고
$g \circ f$ 는 $F(x, t) = (1 - t)x + t\frac{x}{|x|}$ 에 의해 1_X 와 homotopic하다.

숙제 4.
1. $\mathbf{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$.
2. $\simeq$ is an equivalence relation.
3. Möbius band 와 annulus는 homotopy type 이 같은가?
4. $T^2 \setminus \{point\} \simeq$ figure eight.