Product and topological group

정리 1 *If X and Y are path connected, then* $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

증명 Define $\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$,
$\{\alpha\} \mapsto (\{p_1 \circ \alpha\}, \{p_2 \circ \alpha\})$
where p_1, p_2 are projections to X and Y respectively.
일반적으로 두 homomorphism $\phi_1 : G \to H_1$, $\phi_2 : G \to H_2$ 에 대해 $\phi(g) = (\phi_1(g), \phi_2(g)) : G \to H_1 \times H_2$ 역시 homomorphism이 되므로 위에서의 ϕ 는 homomorphism이 된다. 이제 ϕ의 역함수를 찾기 위해 아래와 같이 ψ를 정의하자.
$\psi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$
$(\{\beta\}, \{\gamma\}) \mapsto \{\delta\}$
,where $\delta(t) = (\beta(t), \gamma(t))$
이 ψ는 ϕ 의 역함수가 되고 이제 ψ 가 잘 정의되었는지만 살펴보면 된다.
F : $\beta \sim \beta'$, G : $\gamma \sim \gamma'$ 일 때 $H(t, s) = (F(t, s), G(t, s))$ 로 주면 이는 δ 와 δ' 사이의 homotopy를 주므로 ψ 가 잘 정의되었음을 알 수 있다.

□

예 3. Topological group

정리 2 *G : a path connected topological group with identity e*
$\Rightarrow \pi_1(G, e)$ *is abelian.*

증명 $\{\alpha\}, \{\beta\} \in \pi_1(G, e)$ 에 대해 $\{\alpha\}\{\beta\} = \{\beta\}\{\alpha\}$ 임을 보이기 위해
$\{\alpha\}\{\beta\}\{\alpha\}^{-1}\{\beta\}^{-1} = 1$ 임을 보이자.
$\{\alpha\}\{\beta\}\{\alpha\}^{-1}\{\beta\}^{-1} = \{\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}\} \simeq 1$ 을 보이기 위해 $\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}$ 를 다음과 같이 보자.
그림 1,2
그림 2에서 먼저 보면,
F : $I^2 \to G$ given by F(t,s)=$\alpha(t)\beta(s)$ 는 group G 안에 곱이 정의되므로 I^2상에서 연속함수로 잘 정의되고 I^2의 boundary는 사실상 $\alpha * \beta * \overline{\alpha} * \overline{\beta}$를 준다.
즉 그림 1의 boundary에서 그림 2의 boundary로 e들을 한 점으로 보내는 연속함수가 있고, 이것은 앞 여러 곳에서 본 것같이 I^2의 내부로도 extend된다(예컨데 radial extension).
또 다르게 보는 방법은
$\{\alpha\}\{\beta\}\{\alpha\}^{-1}\{\beta\}^{-1} = F_\sharp(\{\partial I^2\}) = F_\sharp(1) = 1.$

□

Ecercise. 위 증명의 마지막 과정에서 보다 일반적으로 다음을 이용해서 증명해도 된다.

$\{\alpha\} \in \pi_1(X, x_0)$, $\alpha : S^1 = \partial D^2 \to X$ 에 대해
$\{\alpha\} = 1$ *if and only if* α *can be extended to* D^2