Definitions and Examples

Assumption. All the spaces in this chapter are path connected and locally path connected.

정의 1 *Let $p : \widetilde{X} \to X$. $\widetilde{X}$ is a covering space of X with a covering map p if*
(1) p is onto and
(2) each $x \in X$ has a neighborhood U which is evenly covered, i.e.,
$p^{-1}(U) = \coprod_{a \in A} V_a$ is a disjoint union of open sets V_a of $\widetilde{X}$ such that
$p|_{V_a} : V_a \to U$ is a homeomorphism , $\forall\ a \in A$.

따라서 임의의 $x \in X$에 대해 $p^{-1}(x)$ 는 discrete하다.

Examples.
1 . $id : X \to X$.
2 . $p : \mathbf{R} \to S^1(\subset \mathbf{C})$ given by $p(x) = e^{2\pi i x}$.
3 . $p : S^1 \to S^1$ given by $p(z) = z^n$.
위와 같이 p^{-1}의 image가 n 개인 경우를 n-sheeted covering 혹은 n-fold covering 이라고 부른다.
4 . $p : S^n \to P^n = S^n/\sim$.
이 경우 quotient map p는 covering map이 되고 특히 two fold covering(double covering) 이 된다.
5 . $p : \mathbf{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$ given by $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$.

Excercise. If $p : \widetilde{X} \to X$, $q : \widetilde{Y} \to Y$ are covering maps, then
$p \times q : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ is also a covering map. (예 2번과 5번에서 볼 수 있다)

6 . non-covering

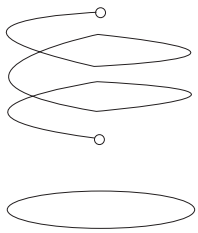

그림 1

p는 local homeomorphism 은 되지만 covering map은 될 수 없다.(왜 그런가?)

7 . (figure eight, torus 등의 n-fold covering.)

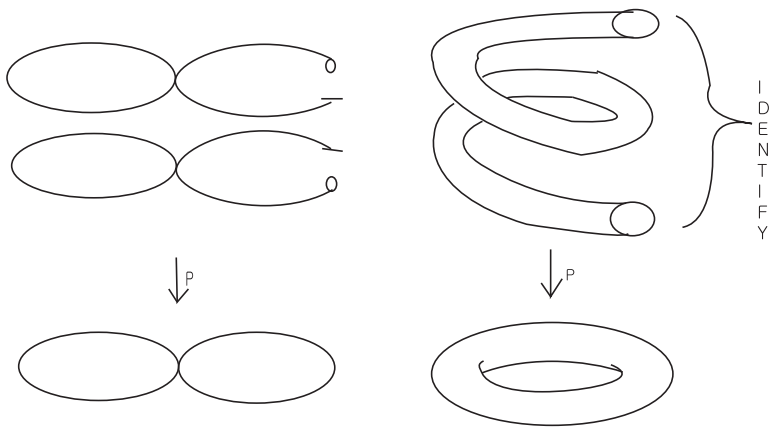

그림 2

8 . Möbius band 의 double covering 은 annulus 가 되고 3-fold covering은 다시 Möbius band 가 된다. 같은 방법으로 Klien bottle의 double covering은 torus가 된다. 일반적으로 다음을 증명하라.

Note.
1 . M is a manifold $\Rightarrow \widetilde{M}$ *is also a manifold.*
(증명) 각 $x \in \widetilde{M}$에 대해 $p(x) \in M$ 가 coordinate chart (U,φ) 를 가지고, 또한 $p(x)$ 는 evenly cover 되는 neighborhood V 를 가진다. 이 때 U∩V 에 대해 $p^{-1}(U \cap V)$를 생각해 보면, 이 중 x를 포함하는 $U \cap V$의 copy가 있고 이 copy와 $\varphi \circ p$가 x의 coordinate chart 를 준다.

Excercise. If M is a C^∞-manifold $\Rightarrow \widetilde{M}$ is also a C^∞-manifold .

2 . M is orientable $\Rightarrow \widetilde{M}$ *is also orientable.*
(증명) 먼저 $\widetilde{M}$의 각 점 x에 orientation을 주자. $\widetilde{M}$의 orientation 은 local homeomorphism p 를 이용하여 $p(x)$의 orientaion을 그대로 가져다 쓴다. 그러면 각 $x \in \widetilde{M}$에 대해 orientation이 locally constant가 되는 $p(x)$의 근방 U 를 잡을 수 있고, 또한 $p(x)$에서 evenly cover 되는 V를 잡을 수 있다. 이 때 $p^{-1}(U \cap V) = \coprod_{a \in A} W_a$ 중 x를 포함하는 W_a에서 orientation은 p에 의해 $U \cap V$의

orientation과 같으므로 locally constant이다.

숙제 7.
Every non-orientable manifold has an orientable double covering manifold.

3 . M is a compact manifold, p is a finite covering $\Rightarrow \widetilde{M}$ *is compact.*

4 . M이 orientable이고 genus 를 g개 가진 경우, 이에 따른 $\widetilde{M}$를 살펴보자. 위의 내용에 따라 $\widetilde{M}$는 역시 orientable이므로 χ만 알면 $\widetilde{M}$를 결정할 수 있다. 그런데 $\widetilde{M}$가 n-fold 라면 M의 triangulation을 $\widetilde{M}$ 위로 올리면 V,E,F 모두 n배가 되므로 χ 역시 n배가 된다. 비슷한 방법으로 M이 non-orientable 일 때는 orientable double covering $\widetilde{M}$를 가지므로 M으로부터 $\widetilde{M}$을 결정할 수 있다.